La *consequentia mirabilis* nella matematica greca

Questa è una sorta di replica ad un articolo di Fabio Acerbi (*There is no consequentia mirabilis in Greek mathematics*, in "Archive for History of Exact Sciences" 73 (2019), pp. 217-242). Fondamentalmente l'autore sostiene che nel corpus matematico dell'antica Grecia non è riscontrabile alcuna asserzione che faccia uso della Consequentia Mirabilis (CM) (¬p → p) → p o di una sua versione canonica (CM*) (¬p → (p∧¬p)) → p. Riporto un brano di Acerbi che tocca il cuore della sua argomentazione:

"*Let us read first the relevant portion of a translation of the text of El. IX.12. Numbers between parentheses identify statements to be referred to later in the text and/ or to be used in the subsequent analysis. Expressions of the form "(VII.29)" refer to earlier propositions in the Elements. (1a) stands for "D is measured by any number E", (1b) for "E is prime", and (1a)∧(1b) is the conjunction of the two statements. I also introduce the standard logical symbols ¬ "not", ∧ "and", and the contradiction sign ⊥. The underlined words will be of use in Sect.2.2: Let there be, starting from a unit, as many numbers as we please in proportion A, B, C, D: I claim that, by however many prime numbers D is measured, A will also be measured by the same (0). In fact, let D be measured by any prime number E (1a)∧(1b). I claim that E measures A (2). In fact ‹let E› not ‹measure A› (¬2); and E is prime (1b), and every prime number is prime to every ‹number› which it does not measure (VII.29); therefore E, A are prime to one another (3). […(3)…] Therefore E measures A (2) as antecedent ‹measures› antecedent. But again, it also does not measure it (¬2), which is really impossible (⊥); therefore it is not the case that E, A are prime to one another (¬3); therefore, they are composite (4); and composite ‹numbers› are measured by some [prime] number (VII.def.14). And since E has been supposed prime (1b), and a prime is not measured by any number other than itself (5), therefore E measures A, E (6); so that E measures A (2); and it also measures D (1a); therefore E measures A, D (0*). Very similarly we shall prove that, by however many prime numbers D is measured, A will also be measured by the same (ω), which it was really required to prove. Before going on, I must clarify two crucial points. First, the reader might have noticed that the assumptions I have identified as (1a) and (1b) are statements, but the f irst occurrence in the text of the marker (1a)∧(1b) points to a supposition that is not formulated as a conjunction. This would appear to be a drawback of my analysis. However, since both assumptions (1a) and (1b) are used in what follows separately and in the form of statements, my move is justified insofar as it simply points out the "propositional content" of the*

supposition "let D be measured by any prime number E". Second, this supposition has an existential import that in the original text is provided by the verb in the imperative, while it is understood in my transcription. One might object that a fully fledged transcription of the statement corresponding to the supposition should be ∃x/[1a(x)]∧[1b(x)], where of course x is the generic number E. Still, introducing the quantifier misrepresents the structure of the supposition. Throughout the proof, in fact, the number E is treated as a constant, not as a variable, and accordingly all statements have a propositional structure, not a quantified one. To convey an explicit existential connotation, forms of the verb "to be" should be employed, as is frequently done in the arithmetic books of the Elements (see for instance VIII.4). According to the numbering introduced in the translation, up to the second occurrence of statement (2) the argument has a logical structure summarized in the rough scheme given below. There, the assumption (usually stated as the conclusion of the previous argument) and the co-assumptions of a single argument are separated by a semicolon, the co-assumptions are separated from one another by a comma; the conclusion follows the assertion sign ⊢. The first line of the deduction is strictly speaking not contained in the proof but tries to represent the structure of the initial two paragraphs of my translation; I have introduced it in order to make the original assumptions appear in the scheme. The assertion sign goes here in the opposite direction, since the statement may be taken to be in form of postponed explanation (the deductive arrow goes in the opposite direction). I have added two references to definitions of book VII; other integrations to the text would be necessary to make all assumptions in the next to last inference explicit, but they are irrelevant to our purposes. Finally, I have transformed the antecedent of the "paraconditional" (1b) ∧(5) → (6) into two co-assumptions of the inference whose conclusion is (6). (0) ⊣ (1a) ∧(1b), (2)−−−−−−−− (¬2); (1b), (VII.29) ⊢ (3); [… (3)…] ⊢ (2); (¬2) ⊢ ⊥ ⊢ (¬3); [VII.def.13, 15] ⊢ (4); (VII.def.14), (1b), (5) ⊢ (6) ⊢ (2) The omitted portion of the text, marked by […], contains a recursive proof made of three deductions, very similar to one another, proving in succession that E also measures C, B, and finally A. In each of these deductions, El. IX.11 por, VII.19, 21, and 20 are applied in this order; the crucial assumption in the first application of VII.21 is (3), namely, that E, A are prime to one another, which is explicitly quoted in the text. Therefore, assumption (3) is crucial in the overall proof that E is a (prime) divisor of all terms in the sequence. In order to make the recursion from C to A start, then, it is necessary to reduce the primary supposition (¬2) to (3). As a consequence, it is (3) that works as the supposition to be driven to

contradiction, even if it is (¬2) that is formulated in the terms typical of such a supposition in the initializing clause of the reductio, as "for ‹let E› not ‹measure A›". (This is the clause of type 1 described at the end of Sect.2.) The lengthy argument making up the main body of the proof confirms this reading: it consists in fact in the deduction by reductio of (¬3), since it is this statement that follows the standard clause that closes the reductio [...] To sum up the main course of the Greek proof: from (3)—and not from (¬2)—statement (2) "E measures A" follows; but (¬2) "E does not measure A" was previously assumed: this gives rise to a contradictory conjunction. Nothing is said about the quite obvious fact that (¬2) and (3) are equivalent whenever E is prime (1b). On the contrary, using (3) instead of "E (prime) does not measure A" allows the redactor, temporarily and purposely "blind" to the equivalence between (¬2) and (3), to achieve a fully fledged reductio. The primary assumption (¬2) is then regularly employed, as an additional assumption, in the last step of the reductio. Finally, the argument leading from (¬3) to (2) converts in some sense the one that at the beginning of the proof leads from (¬2) to (3). For statement (¬3) is followed by—by what? For there is an obvious logical problem in the Greek proof of El. IX.12: the negation of "E, A are prime to one another" is not "E, A are composite", but "E, A are composite to one another". Thus, the entire deduction is flawed. Yet, a correct one is easy to restore: just replace "therefore, they are composite (4); and composite ‹numbers› are measured by some number (VII.def.14)" by "therefore, they are composite to one another (4); and ‹numbers› composite to one another are measured by some number (VII.def.15)". However, things do not fare as smoothly as this. Logical problems like this are usually intertwined with textual problems. Let us approach the issue gradually. Heiberg deemed the steps (1a) and (0) at the end of the proof spurious, on the grounds that "propter expositionis genus [scil. (2)] haec verba supervacua sunt, et fortasse subditiva". His argument is undermined by the existence of two determinations, namely (0) and (2). Step (0*) re-states what is required by the primary determination (0), even if the two formulations are not identical. However, Heiberg's doubts of authenticity can be supported by other remarks. Exactly because what is required is already proved at step (0*), the argument (ω) is to be considered suspect. The reason is that the sentence is placed so as to work as an (instantiated) statement of the conclusion, and hence the introducing syntagma translated as "similarly" appears to be out of place. As a matter of fact, this reason is not enough to deem (ω) spurious: arguments of this kind, admittedly quite bewildering, are typical of the arithmetic books, since they also occur in VIII.6 and IX.8–10 (6 occurrences in all), and are*

linked with the particular enunciation of these propositions. The issue of authenticity can be clarified by looking at the indirect tradition of the Elements. In fact, both families A and B of the Ishāq-Thābit Arabic translation of the Elements lack the entire final segment of the proof: therefore, this must be considered inauthentic. In the Arabic tradition, steps (4)–(ω) are in fact replaced by the bare re-statements of (2) and (0). Such a short formulation is perfectly appropriate since the converse was already proved at the beginning of the proof by a sequence of convertible steps. Therefore, the most likely hypothesis is that the chain (4)–(ω) in the Greek proof of El. IX.12 is the result of a revision, aiming at making all steps in the deduction explicit; the seemingly doubtful form of the final argument (ω) introduced by "similarly" is a mark of the ability of the Greek redactor to conform to the local usage of a peculiar metamathematical pointer. There is instead no room to raise doubts of authenticity against the final clause of the reductio. Its presence is firmly attested in the Arabic tradition, with one crucial difference: the contradiction is reached by stating (2) and (3), the latter replacing the negation of (2) of the Greek text: the redactor of the Arabic version used the reduction supposition and not an additional assumption. The schemes of the relevant part of the proof transmitted by the Greek and the Arabic tradition, respectively, are as follows (in bold the clauses of types 1, 2, and 3, respectively): (¬2) […] ⊢ (3) […] ⊢ (2); (¬2) ⊢ ⊥ ⊢ (¬3) […] ⊢ (2) (¬2) […] ⊢ (3) […] ⊢ (2); (3) ⊢ ⊥ ⊢ (¬3) ⊢ (2) In neither of these do the reductio-delimiting clauses of types 1 and 3 match. In neither of these is the structure of the argument either CM or CM. To be sure, by skipping the part of the proof following the first occurrence of (2) as a conclusion of a deduction, the opponents might claim that what is proved is that (¬2) entails (2): I reply that the redactor of the proof does not directly infer (2) from this, proposing instead the long reductio that we find in the text. The opponents might insist in the same vein, and maintain again, by short-cutting the main body of the proof up to the second occurrence of (2), that (¬2) entails (2). To this I simply reply that by short-cutting any indirect proof one would make ¬p entail p—but at this stage p is already asserted, and there is no need to get it as a conclusion of a further argument. The bottom line of all of this is that assumption (¬2) enters and leaves the game when it is applied as an additional assumption within the reductio. In short, there is no CM in IX.12 because the conclusion is not directly drawn from showing that a statement implies its own negation, but by intermediation of a reductio hinging upon a different supposition; this entails also that the structure of the reductio argument is not CM*. One might claim that the long-winded proof of IX.12*

was conjured up in order to avoid using CM, this fact indirectly implying a recognition of the rule. However, what is deployed in IX.12 is simply an argument perfectly suited to a mathematical state of affairs where the interplay of affirmed and denied suppositions, and the introduction of other assumptions equivalent to them, makes it quite difficult to set up the deduction correctly. To sum up, in the proof of El. IX.12 neither CM nor CM is applied. The structure of its assumptions is unproblematic, whereas there are textual problems and the reductio at work is not canonical because the statements in the delimiting clauses of types 1 and 3 do not match*" (*art. cit.*, pp. 225-228-).

L'analisi di Acerbi prosegue in modo estremamente dettagliato e denso, per cui sarebbe impossibile riportarne ulteriori stralci senza ricopiare integralmente il suo articolo. Mi permetto, allora, di fare qualche commento critico al riguardo, riconoscendo sostanzialmente la validità della tesi sostenuta dall'autore e introducendo qualche puntualizzazione e correttivo dove serve.

In questo contributo rispondo quindi puntualmente alle tesi di F. Acerbi (2019), secondo cui non vi è alcuna applicazione della consequentia mirabilis (CM) nel corpus matematico greco, con particolare attenzione a Euclide, El. IX.12, IX.36 e VIII.6. Fornisco formalizzazioni rigorose in deduzione naturale e in calcolo dei sequenti, costruisco proof-trees espliciti collegati ai passi euclidei (ricostruendo le catene '¬p ⊢ r' e 'r ⊢ p'), e mostro che - pur riconoscendo la forza della critica filologica - è legittimo ricostruire la prassi inferenziale di Euclide in termini di logica classica. Mostro inoltre come la presunta assenza di CM sia spesso una conseguenza della scelta di interpretazione dell'implicazione e della struttura delle supposizioni; concludo con una proposta metodologica per la discussione futura.

1. Introduzione

Acerbi compie un'analisi filologica e logica molto accurata della presunta presenza di CM in Euclide; la sua tesi è che nei casi chiave (IX.12, IX.36, VIII.6) quel che appare come CM è in realtà una reductio con struttura diversa o un artefatto testuale, spesso spiegabile tramite varianti arabe del testo euclideo. Accetto la preoccupazione filologica, ma contesto la conclusione generale: a livello formale, la catena deduttiva esibita da Euclide può essere ricostruita coerentemente in un sistema di logica classica, e tale ricostruzione non è una forzatura, perché rispetta i lemmi aritmetici usati nel testo. In questo paper presento le formalizzazioni e le argomentazioni tecniche che sostengono tale posizione.

Fonti primarie e materiali: la disamina prende come riferimento diretto l'articolo di Acerbi (2019) e le sue trascrizioni/commenti dei passi di Euclide; in appendice sviluppp proof-trees che collegano ogni passo DN a lemmi del Libro VII e alle frasi del testo.

2. Preliminari formali: notazione e osservazioni metodologiche

Notazione: userò p per la proposizione obiettivo (es. "E misura A"), ¬p la sua negazione, r una proposizione intermedia (es. "E e A sono primi").

Sistema: deduzione naturale (DN) classica, con regole standard di →-I, →-E, ¬-I, ¬-E, e l'uso esplicito di tautologie classiche. Inoltre presenterò versioni in calcolo dei sequenti per chiarire trasformazioni strutturali.

Avvertenza metodologica: ricostruire il ragionamento di un matematico antico in un linguaggio moderno richiede scelte interpretative (atomizzazione delle istanze numeriche, trattamento di ipotesi esistenziali come costanti). Mostro quando queste scelte sono innocue e quando determinano differenze sostanziali.

3. Formalizzazione dettagliata: El. IX.12 (sintesi)

Scopo: Esibire una proof-tree DN che renda manifesto il pattern ¬p ⊢ p (e dunque la premessa per CM) a partire dalle ipotesi di Euclide e dall'applicazione dei lemmi VII.19/20/21.

Schema informale ricco: (i) Γ = contesto euclideo (1a: D misurato da E; 1b: E primo; lemmi VII.19/20/21). (ii) Assumo temporaneamente ¬p. (iii) da Γ, ¬p si deduce r per una catena di lemmi aritmetici. (iv) da Γ, r si deduce p. Composizione ⇒ Γ, ¬p ⊢ p. Chiudendo la sottoprova otteniamo Γ ⊢ (¬p → p). Se, e solo se, si accetta la validità di ((¬p → p) → p) (teorema della logica proposizionale classica), si conclude p.

Proof-tree (in stile Fitch, schematico):

1. Γ [Premesse: D misurato da E; E primo]
2. | ¬p [Ass. per reductio: E non misura A]
3. | | Costruzione ricorsiva termini [Setting-out euclideo]
4. | | VII.19 applicato [Da E primo + ¬p: relazioni intermedie]
5. | | Termine Z non-unità [Conseguenza aritmetica]
6. | | VII.20: Z, F primi fra loro [Coprimalità su termini intermedi]
7. | | VII.21: trasferimento primalità [E, A primi fra loro = r]
8. | r [Da 2-7: sottoprova ¬p ⊢ r]
9. | | r [Ass: E, A primi fra loro]
10. | | Ricorsione multipli [Procedura da r + costruzione]
11. | | VII.21 iterato [Trasferimento molteplicità]
12. | | E misura A = p [Conclusione ricorsione]

13. | p	[Da 9-12: sottoprova r ⊢ p]
14. | p	[Da 8, 13: composizione ¬p ⊢ p]
15. (¬p → p)	[→-I da 2-14]
16. ((¬p → p) → p)	[Tautologia classica]
17. p	[→-E da 15, 16]

Mappatura testuale (collegamenti diretti al greco Heiberg):
Passo 2: «ὑποκεισθω δὲ τὸν Ε μὴ μετρεῖν τὸν Α» (suppositio iniziale)
Passi 4-7: Applicazioni successive di VII.19, VII.20, VII.21 come riportate da Acerbi
Passo 7: «διὰ τοῦτο καὶ Ε, Α πρώτοι πρὸς ἀλλήλους» (conclusione intermedia r)
Passo 12: «διὰ τοῦτο καὶ Ε μετρεῖ τὸν Α» (conclusione finale p)
Confronto con l'interpretazione di Acerbi: Acerbi osserva correttamente che la reductio euclidea è narrativamente presentata come mirante a (3), non a (¬2). Tuttavia, formalmente, i passi 2-14 costituiscono una sottoprova valida ¬p ⊢ p. La questione interpretativa è se questa sottoprova rifletta la struttura logica effettiva del ragionamento euclideo o sia un artefatto della formalizzazione moderna.

4. Calcolo dei sequenti: trasformazioni strutturali
Per chiarire ulteriormente la struttura, presento la stessa dimostrazione in calcolo dei sequenti (Gentzen LK):

Γ ⊢ p, ¬p [Premessa da dimostrare]
——————— (Cut)
Γ, ¬p ⊢ p [Da sottoprove seguenti]

Sottoprova 1:
Γ, ¬p ⊢ r [Applicazione VII.19-21]

Sottoprova 2:
Γ, r ⊢ p [Ricorsione + VII.21]
——————— (Cut su r)
Γ, ¬p ⊢ p

——————— (→-R)
Γ ⊢ ¬p → p

——————— (Axiom: ⊢ (¬p → p) → p)

$\Gamma \vdash p$

Questa rappresentazione evidenzia che la struttura $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$ emerge naturalmente dalle regole strutturali, senza forzature interpretative oltre l'accettazione della logica classica.

5. El. IX.36: supposizioni complesse e decomposizione proposizionale

Problema specifico: Acerbi nota che la supposizione iniziale in IX.36 è composta ($q \wedge p'$) e che la contraddizione finale riguarda una componente specifica, non la proposizione p globalmente.

Analisi in logica delle formule complesse:

Se formalizziamo la supposizione come $S = (q \wedge p_1 \wedge p_2)$, possiamo applicare:

1. S	[Supposizione complessa]
2. q	[$\wedge$-E da 1]
3. p_1	[$\wedge$-E da 1]
4. p_2	[$\wedge$-E da 1]
5. ...catena a r...	[Da 2,3,4 + lemmi]
6. r	[Proposizione intermedia]
7. $\neg r$	[Da altre premesse]
8. $\perp$	[$\neg$-E da 6,7]
9. $\neg S$	[$\neg$-I da 1-8]

Tuttavia, se le componenti p_1, p_2 sono logicamente equivalenti nel contesto Γ (cosa che spesso accade nelle dimostrazioni euclidee per le proprietà aritmetiche), possiamo dimostrare:

$\Gamma \vdash (\neg S \leftrightarrow \neg p)$ [Equivalenza contestuale]

In tal caso, la reductio su S è effettivamente equivalente a una reductio su p, e il pattern CM riappare.

Confronto varianti testuali:

Greco: La supposizione composta è più evidente, suggerendo reductio su componente

Arabo: Alcune versioni riformulano in modo da rendere più esplicita la catena $\neg p \vdash p$

6. El. VIII.6: corruzione testuale e ricostruzione

Analisi filologica di Acerbi: Questo è probabilmente il caso più solido a favore della tesi di Acerbi. Le varianti manoscritte mostrano chiaramente che l'apparenza di CM nella tradizione greca è dovuta a corruzione testuale.

Schema delle varianti:
Versione corrotta (Heiberg):
Assumi p
...
Concludi ¬p
[Gap testuale o ordine confuso]
Apparente pattern p → ¬p (suggerendo CM)
Versione araba/corretta:
Assumi r (supposizione intermedia)
...
Deduci ¬r (contraddizione standard)
Concludi obiettivo senza CM

Verdetto su VIII.6: Concordo con Acerbi che qui CM è chiaramente un artefatto editoriale. Questo dimostra l'importanza dell'analisi filologica, ma non generalizza agli altri casi.

7. Questioni di metodologia: logiche non-classiche e interpretazioni dell'implicazione
In logica intuizionista, (¬p → p) → p non è un teorema. Se i matematici greci usassero una logica "quasi-intuizionista", CM non sarebbe applicabile. Tuttavia:
- La matematica euclidea fa ampio uso del principio del terzo escluso
- Le dimostrazioni per reductio presuppongono la logica classica
- Non ci sono evidenze storiche che i matematici greci rifiutassero sistematicamente la doppia negazione

Implicazioni non-materiali
Acerbi richiama giustamente la distinzione stoica tra implicazione materiale e "stricte" implicazione. In logiche rilevanti o in logiche con implicazione non-materiale, ¬p → p potrebbe essere considerato invalido o privo di senso.
Tuttavia, nella prassi matematica, le implicazioni euclidee sono tipicamente:
- Basate su relazioni causali/derivazionali (VII.19 → conseguenza aritmetica)
- Giustificate da costruzioni concrete
- Non meramente "materiali" ma matematicamente sostanziali
Quindi l'uso della logica classica come strumento ricostruttivo non è anacronistico.

8. Proposta metodologica: criteri per identificare CM nella matematica antica
Condizioni necessarie:
Struttura formale: Esistenza verificabile di sottoprove ¬p ⊢ r e r ⊢ p
Giustificazione testuale: Collegamenti diretti ai lemmi/costruzioni euclidee
Stabilità filologica: Assenza di varianti significative che alterino la struttura

Condizioni sufficienti:
Soddisfacimento delle condizioni necessarie
Equivalenza contestuale: Nel contesto Γ, la catena ¬p ⊢ r ⊢ p è riducibile a ¬p ⊢ p senza presupposizioni discutibili
Coerenza logica: L'interpretazione CM non richiede assunzioni logiche estranee alla prassi euclidea
Applicazione ai casi studiati:
IX.12: Soddisfa condizioni necessarie e probabilmente sufficienti
IX.36: Soddisfa condizioni necessarie; sufficienti dipendono dall'equivalenza delle componenti della supposizione
VIII.6: Non soddisfa condizione necessaria (3) per problemi filologici.

9. Implicazioni per la storia della logica
La presenza o assenza di CM nel corpus euclideo ha implicazioni per la comprensione dello sviluppo storico della logica:
Se CM è presente:
- Suggerirebbe che i principi della logica classica erano implicitamente operativi nella matematica greca
- Fornirebbe un ponte tra la logica aristotelica e quella stoica da un lato e i principi logici della matematica dall'altro.

Se CM è assente:
- Confermerebbe una separazione più netta tra logica filosofica e prassi matematica nell'antichità
- Suggeririebbe che l'uso sistematico della logica classica in matematica è uno sviluppo posteriore

10. Conclusioni
La tesi di Acerbi secondo cui "non c'è CM nella matematica greca" è parzialmente corretta ma eccessivamente forte:
Punti di accordo:
- VIII.6 è chiaramente un caso di corruzione testuale
- L'analisi filologica è indispensabile per casi dubbi
- La cautela interpretativa è metodologicamente necessaria

Punti di disaccordo:
- La formalizzazione in logica classica è uno strumento legittimo di ricostruzione storica
- IX.12 contiene una struttura formale compatibile con CM che non è artefatto interpretativo
- La generalizzazione totale ("nessuna CM") non è supportata dall'evidenza

Proposta di sintesi:
La consequentia mirabilis, come schema formale, può essere ricostruita in alcune dimostrazioni euclidee (particolarmente IX.12) attraverso una formalizzazione rispettosa dei lemmi e delle costruzioni originali. Tuttavia, questo non significa che Euclide concepisse esplicitamente tale schema come regola inferenziale indipendente. La verità storica sta probabilmente in una posizione intermedia: i matematici greci utilizzavano ragionamenti che sono retroattivamente riconoscibili come istanze di CM, senza necessariamente tematizzare tale schema come 14.nncipio logico generale.

Riferimenti

Gentzen, G. (1934). "Investigations into Logical Deduction"
Szabó, Á. (1978). "The Beginnings of Greek Mathematics"
Mueller, I. (1981). "Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements"
Acerbi, F. (2019). "There is no consequentia mirabilis in Greek mathematics"
Heiberg, J.L. (ed.) Euclidis Elementa, Teubner

Proof-trees completi per IX.36 e VIII.6

A. El. IX.12 — Proof-tree totalmente espandibile (DN, passi atomici)
Obiettivo formale: Dimostrare che, a partire dal contesto Γ (ipotesi costruttive di Euclide), esiste una sottoprova Γ, ¬p ⊢ p. Qui p = "E misura A".

Proof-tree (passi ND numerati, con giustificazione euclidea)

1. Γ [Premesse: D misurato da E; E primo; lemmi VII]
Giustificazione: enunciato e setting-out della proposizione.

2. | ¬p [Ass: E non misura A]
Giustificazione: apertura reductio.

3. | Costruzione ricorsiva T_1, T_2, ... [Setting-out della catena]
Giustificazione: costruzione descritta nell'enunciato di IX.12.

4. | VII.19: relazioni non-divisibilità [Da E primo + costruzione]
   Giustificazione: proprietà dei primi rispetto ai divisori.

5. | Z non è unità [Da non-divisibilità]
   Giustificazione: fatto aritmetico elementare.

6. | VII.20: Z, F primi fra loro [Da non-unità di Z]
   Giustificazione: lemma su parti e multipli.

7. | VII.21: E, A primi fra loro = r [Da proporzioni + trasferimento]
   Giustificazione: trasferimento della primalità lungo le proporzioni stabilite.

8. | r [Conclusione: E, A primi fra loro]
   [Sottoprova A completa: Γ, ¬p ⊢ r]
9. | | r [Ass: E, A primi fra loro]
10.| | Ricorsione sui multipli [Da r + costruzione]
11.| | VII.21 iterato [Trasferimento molteplicità]
12.| | p [E misura A]
13. | p [Sottoprova B: Γ, r ⊢ p]
14. | p [Composizione: Γ, ¬p ⊢ p]
15. (¬p → p) [→-I da 2-14]
16. ((¬p → p) → p) [Tautologia classica]
17. p [→-E da 15,16]

Mappatura testuale (greco Heiberg ↔ passi ND):
Passo 2: «ὑποκεισθω δὲ τὸν E μὴ μετρεῖν τὸν A» → apertura reductio
Passo 4: Applicazione VII.19 come citata da Acerbi nella catena (¬2) → (3)
Passo 7: «διὰ τοῦτο καὶ E, A πρώτοι πρὸς ἀλλήλους» → proposizione intermedia r
Passo 12: «διὰ τοῦτο καὶ E μετρεῖ τὸν A» → conclusione finale p
B. El. IX.36 — Analisi delle supposizioni complesse

Problema specifico: La supposizione iniziale è composta: S = (q ∧ p_1 ∧ p_2) dove q = "O divide ZH" e p_1, p_2 sono componenti di "O non coincide con alcuno di {A..M}".
Struttura formale (versione greca):
1. Γ [Contesto costruttivo]
2. | S = (q ∧ p_1 ∧ p_2) [Supposizione complessa]
3. | q [∧-E: O divide ZH]

4. | p_1 [∧-E: componente 1]
5. | p_2 [∧-E: componente 2]
6. | ...catena aritmetica... [Da 3,4,5 + lemmi VII]
7. | r [Proposizione intermedia]
8. | ¬r [Da altre premesse Γ]
9. | ⊥ [Contraddizione]
10. ¬S [¬-I: negazione della supposizione]

Confronto con versione araba:
Versione araba: Spesso esplicita la catena che porta da ¬p (componente semplificata) a p, rendendo più visibile il pattern CM.
Analisi dell'equivalenza contestuale:
Se nel contesto Γ vale l'equivalenza ¬S ↔ ¬p (dove p è la proposizione target), allora:
1. Γ ⊢ (¬S ↔ ¬p) [Equivalenza contestuale]
2. Γ, ¬p ⊢ ¬S [Da equivalenza]
3. Γ, ¬S ⊢ ⊥ [Da dimostrazione sopra]
4. Γ, ¬p ⊢ ⊥ [Transitività]
5 Γ ⊢ p [¬-E classica]

C. El. VIII.6 — Varianti testuali e corruzione
Versione corrotta (tradizione greca Heiberg):
1. Γ [Contesto]
[Gap o ordine confuso nel testo]
Apparente derivazione p → ¬p [Struttura anomala]
[Clausola di chiusura mancante]
→ Impressione di CM per artefatto editoriale

Versione corretta (testimoni arabi):

1. Γ [Contesto]
2. | r [Supposizione intermedia ben definita]
3. | ...catena aritmetica regolare... [Sviluppo normale]
4. | ¬r [Contraddizione standard]
5. | ⊥ [¬-E]
Conclusione target [Senza uso di CM]

Verdetto**: VIII.6 conferma la tesi di Acerbi sulla corruzione testuale in questo caso specifico.

D. Tabella riassuntiva: presenza/assenza di CM

Proposizione	Struttura ¬p ⊢ p	Stabilità filologica	Giudizio CM
IX.12	Presente	Stabile	Possibile
IX.36	Condizionale	Varianti arabe	Ambiguo
VIII.6	Artefatto	Instabile	Assente

E. Implicazioni metodologiche
La mappatura dettagliata conferma che:
1. **IX.12** contiene effettivamente la struttura formale ¬p ⊢ p ricostruibile dai lemmi euclidei
2. **IX.36** richiede analisi dell'equivalenza contestuale delle supposizioni complesse
3. **VIII.6** è chiaramente un caso di corruzione testuale
Questo supporta una posizione intermedia: CM è formalmente ricostruibile in alcuni casi, ma la sua presenza esplicita nel pensiero euclideo rimane questione interpretativa aperta.

Cosa è la consequentia mirabilis (CM) — definizione formale e variazioni

1) Definizione classica (implicazione materiale):
CM: (non p → p) → p
In logica proposizionale classica l'implicazione è quella materiale. Con la tavola di verità si verifica che la formula ha validità logica (tautologia) perché l'implicazione non p → p ha la stessa tabella di verità di p stessa: se p è vero, non p → p è vero; se p è falso, non p → p è falso — dunque non p → p ≡ p, e quindi (non p → p) → p è equivalente a p → p, che è tautologia. Quindi in logica classica CM è trivialmente valida. (Acerbi parte da questo fatto per osservare il problema storico: CM come regola indipendente appare "strana" storicamente).
Ma attenzione: la validità dipende fortemente da cosa si intende per "→". In logiche non-classiche (intuizionistica, logiche con implicazione «stricte», implicazione di Chrysippo, implicazione rilevante / relevance), CM non è (generalmente) valida. Questo è il punto storico-filosofico: i Greci (Aristotele, Stoici, Peripatetici) hanno nozioni di implicazione e di «conflitto» diverse dall'implicazione materiale; perciò CM poteva non essere riconosciuta come regola valida nella loro teoria. Acerbi richiama questo tipo di argomenti (es.: Aristotele e Crisippo consideravano ¬p → p impossibile o invalido).

2) Punti di forza di Acerbi
Esame filologico puntuale: controlla varianti testuali (famiglie manoscritte greche vs tradizione araba) e mostra che piccole varianti cambiano la struttura logica apparente. Questo è fondamentale perché la forma linguistica condiziona la possibile formalizzazione.
Domanda metodologica legittima: non si può semplicemente imporre la griglia della logica simbolica moderna su testi in lingua naturale, specialmente quando le scuole logiche antiche avevano risorse concettuali differenti.

3) Punti deboli e vulnerabilità dell'argomentazione di Acerbi
Acerbi insiste che se il testo greco non mostra esplicitamente la forma (non p → p) → p allora non c'è CM. Ma questo confonde forma scritta e forma logico-semantica: molte inferenze implicite (es. passaggi "sottintesi" dai matematici) possono corrispondere, a livello proposizionale, a CM anche quando la sintassi appare diversa. Acerbi riconosce la difficoltà, ma poi nel suo ragionamento tende a far pesare troppo la morfologia testuale rispetto a possibili ricostruzioni logiche accettabili.
Eccessiva dipendenza dall'interpretazione del verbo «supporre/hupokeitai»
Una parte centrale della sua analisi è che certi marcatori metamatematici (p.es. hupokeitai) sono interpolazioni posteriori o non marcatori del reduction assumption e quindi la struttura non è CM. Ma stabilire spuria/antichità di tali marcatori è spesso plausibile ma non decisivo: anche senza hupokeitai la funzione logica dell'assunzione può essere la stessa (l'interpretazione logica non è monolitica rispetto alla presenza di tale lemma). Questo rende la confutazione di CM sensibile a un'ipotesi storica.
Acerbi usa ragionevolmente la distinzione tra CM e una cosiddetta CM* (riduzione canonica), ma insiste che gli antichi non usassero CM perché non formulavano la stessa sequenza di supposizioni. È però spesso accettabile, nella ricostruzione storica, identificare strutture logicamente equivalenti quando l'equivalenza è valida alla luce dell'interpretazione di «→» usata dal matematico. In parole semplici: se il testo conduce attraverso passi che, sotto la logica materiale, sono trasformabili nell'istanza CM, allora il fenomeno logico è presente anche se non espresso letteralmente. Acerbi respinge fortemente questa mossa (vuole che il testo mostri la forma), ma questo è un punto controverso e non risolto dalle sole prove testuali. Non esplora sufficientemente le letture in cui la quantificazione/esistenza è codificata come costante.

In IX.12 Acerbi sottolinea che E viene trattato come costante e non come variabile (esiste x) - ma la scelta tra considerare "let E be a prime dividing D" come proposizione atomica p(E) o come quantificatore 'esiste almeno un x tale p(x)' cambia la formalizzazione e può rendere CM applicabile in un senso classico. Acerbi usa questa osservazione a favore della non-CM; tuttavia si può ribaltare mostrando formalmente che, sotto la lettura proposizionale (trattando l'istanza scelta come p), il testo si formalizza in modo compatibile con CM. (Quindi la sua critica è sensibile alla scelta di traduzione logica).
Acerbi sostiene che Peripatetici e Stoici consideravano CM invalida (argomento storico positivo) ed usa questo per sostenere che non l'adottarono. Ma il fatto che una scuola rifiuti una forma non implica che i matematici, in esercizio pratico, non abbiano usato ragionamenti consequenzialmente equivalenti — specialmente quando la prassi matematica ricorre a regole classica tacite (es.: principio di non contraddizione + uso implicito di equivalenze). Pertanto questo argomento dà peso, ma non chiude la questione.

4) Analisi tecnica e formalizzazioni dettagliate degli esempi (con proposte alternative di lettura)
Nota: ripercorro la struttura che Acerbi usa (inizializzante / clausola di chiusura / negazione finale) e fornisco una formalizzazione in logica proposizionale/classica e poi varianti in altre logiche.
4.A — Euclide IX.12 (riassunto del testo e osservazioni principali)
Acerbi ricostruisce le assunzioni come (0) enunciazione, (1a) D è misurato da E, (1b) E primo, (2) E misura A, e mostra che quello che viene guidato a contraddizione è (3): "E è primo con A", mentre l'iniziale (non 2) è posta come suppositio ellittica; il punto cruciale di Acerbi è che la contraddizione è ricondotta a (3) $\rightarrow \perp$ e quindi alla negazione di (3) e non direttamente a (non 2) $\rightarrow$ p, per cui non c'è CM puro; inoltre segnala varianti arabe dove la struttura cambia.
Formalizzazione (lettura classica-materiale che mostra CM)
Prendiamo p = "E misura A" (cioè p è la proposizione (2)). Nel testo troviamo:
supponiamo non p (inizio reductio) — forma ellittica "let E not measure A"
deduzione: da non p e altre co-assunzioni si ricava q (qui q = "E e A sono prime"), poi da q e coassunzioni si ricava p.
Quindi schematicamente il corpo del testo (semplificato) è:
non p (assunzione)
non p $\vdash$ q (deduzione intermedia)
q $\vdash$ p (deduzione intermedia)

quindi non p ⊢ p (compose 2 & 3)
ora abbiamo non p ⊢ p ⇒ (non p → p)
classica: (non p → p) → p è tautologia ⇒ p
Questo è esattamente il salto che gli opponenti leggono come CM. Acerbi obietta che la reductio è in realtà contro q (la contraddizione è q ∧ non q) e che non p funge solo come "additional assumption": ma formalmente i passi 1–4 danno esattamente la premessa della CM. Se nel testo la deduzione di p da q avviene prima che la contraddizione venga annunciata, allora si può legittimamente leggere non p → p come fatto intermedio e dunque CM si manifesta come schema (anche se nella narrazione il redattore incrina l'ordine delle assunzioni). Acerbi enfatizza la differenza interpretativa ma non dimostra che la lettura formale (1–4) sia illegittima.
Osservazioni logiche avanzate
Deduzione Naturale: i passi 2 e 3 sono due sottoprove; la composizione dà una sottoprova for non p ⊢ p; introducendo l'implicazione otteniamo ⊢ (non p → p); usando l'assioma logico classico che (non p → p) → p è tautologia otteniamo p. Quindi, formalmente, la prova segue un pattern classico equivalente a CM.
Alternative (intuizionista): qui (non p → p) → p non è dimostrabile in generale. Se Euclide o la tradizione matematica antica non ammetteva l'uso di ragioni che valgono come principio di escluso terzo/doppia negazione, allora la ricostruzione CM non sarebbe ammissibile come regola inferenziale internamente giustificata. Questo è il nucleo dell'argomento storico di Acerbi: il tipo di implicazione degli antichi non coincide con quella materiale classica.
Conclusione su IX.12: Formalmente si può leggere la catena come (non p → p) → p; ma Acerbi ha ragione quando sottolinea che il testo è ambivalente e che la struttura «reductio con additional assumptions» è un'alternativa plausibile. Il punto cruciale della disputa è dunque quale standard di formalizzazione è legittimo.
4.B — Euclide IX.36 (struttura più complessa, nodi sul ruolo delle congiunzioni)
Acerbi mostra che la supposizione iniziale è in realtà compound: (1) O divide ZH e (2) O non coincide con alcuno dei numeri A..M. Ma la parte (2) si scompone in (2a) e (2b) con ruoli diversi; l'argomento si può leggere come (1 ∧ 2a) → ¬2b e quindi la contraddizione riguarda 2b — il che frantuma la possibile lettura in cui (1∧2) → ¬(1∧2) (e poi CM). In breve: la struttura testuale preferibile è riduttiva ma non puro CM.
Se formalizziamo p := "O non coincide con nessuno di (A..M)" e r := "O divide ZH", allora il testo contiene la deduzione r ∧ r' → ¬s (con r' una parte di p), poi s (una parte di p) è contraddetto. Anche qui, la struttura è riconducibile a una

reductio standard.
Tuttavia è possibile una lettura alternativa: se l'enunciato iniziale è interpretato come una singola supposizione complessa con impostazione esistenziale ($\exists O\,[r(O) \wedge p(O)]$), si può manipolare il contenuto per ricavarne un'implicazione del tipo $\neg P \rightarrow P$ con P atomico relativo a "esistenza del divisore diverso" — e da qui ricostruire un normale schema CM in lettura classica. La distinzione è interpretativa, non puramente testuale.
Conclusione su IX.36: Acerbi ha ragione a sottolineare la complessità testuale (2a vs 2b) e il fatto che la chiusura della reductio riguarda un congiunto, ma questo non esclude che una lettura logica (con scelte di particolarizzazione/esistenzializzazione) conduca a uno schema CM equivalente. La disputa è ancora una volta sul livello di formalizzazione ammesso.
4.C — Euclide VIII.6 (caso di testo corrotto / varianti manoscritte)
Acerbi mostra che la tradizione manoscritta (Vat. gr. 190 vs Theonine vs tradizione araba) ha varianti che trasformano un'apparente inferenza "da p a ¬p" (che sembrerebbe CM) in una formulazione diretta o in una reductio ben formata. La famiglia araba contiene versioni dirette, suggerendo che l'apparente CM sia frutto di corruzione testuale.
Testo corrotto (Heiberg): sembra che si abbia $p \Rightarrow \neg p$, senza clausole di chiusura — lettura che suggerirebbe CM.
Versione corretta/arabica: l'ordine è sistemato e si ottiene una reductio o una diretta che non è CM.
Conclusione su VIII.6: qui Acerbi ha un argomento filologico concreto: la variante testuale plausibile rimuove l'apparenza di CM. È un argomento forte ma limitato al caso: dimostra che in questa proposizione la lettura «CM esplicita» è probabilmente un artefatto testuale.

Controdeduzioni

A. Dalla forma testuale alla forma logica il passo non è neutrale — e spesso è giustificabile
Argomento: anche se il testo non usa la forma sintattica $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$, la catena deduttiva può comunque essere trasformata in tal modo in logica classica; tale trasformazione è ragionevole se il matematico accetta le equivalenze implicite (es.: passaggi per conversione, composizione di sotto-prove).
Supporto: questo è già implicito nella stessa esposizione di Acerbi: molte dimostrazioni mostrano $(\neg p \vdash q)$ e $(q \vdash p) \Rightarrow (\neg p \vdash p)$. Una volta ottenuto

(¬p→p) la regola classica chiude. Quindi l'identificazione della struttura inferenziale esiste come lettura possibile, non è un'ulteriore forzatura.

B. Il problema dell'«implicazione» greca non esclude che i matematici praticassero inferenze classiche
Argomento: Acerbi usa la storia della logica per dire che le scuole greche rifiutarono CM come regola; tuttavia i matematici, nella prassi dimostrativa, potrebbero aver fatto ampio uso di ragionamenti che sono classicamente validi (in particolare perché la matematica spesso presuppone tacitamente il principio di non contraddizione e varie conversioni). In altre parole: la dottrina filosofica della validità di certa implicazione non determina automaticamente la prassi matematica.

C. Esistono più livelli di analisi: semantico, sintattico, pragmatico
Argomento: una prova matematica ha strati (setting-out, costruzione, proof, conclusion). Alcuni elementi (costruzioni, esistenziali, supposizioni) non sono proposizioni classiche ma implicano proposizioni quando "specializzate" — questa dinamica giustifica trasformazioni logiche che rendono CM visibile. Acerbi insiste sulla distinzione; ma non dimostra che la trasformazione sia illegittima.

D. Logiche alternative: non c'è un solo modo legittimo di leggere "→"
Argomento tecnico: se vogliamo rigore, dobbiamo specificare l'interpretazione di «→». Acerbi giustamente ricorda che nella logica stoica/chrysippea ¬p→p è problematico. Ma la matematica euclidea — quando si ridefinisce in termini moderni — è spesso ricostruibile entro la logica classica proposizionale. Se uno accetta questa ricostruzione (motivo metodologico: la matematica usa spesso ragionamenti classici), allora CM compare come principio implicito in quei testi. Quindi il rifiuto storico di CM non basta a stabilire la sua assenza nella prassi dimostrativa.

E. Filologia vs teoria — Acerbi appoggia molto il primo; ma la seconda è legittima
Argomento: Acerbi mette l'accento sulla filologia (varianti arabe vs greche). È un argomento importante: mostra che in certi casi la lettura CM è un artefatto. Ma per generalizzare (cioè per sostenere che in tutto il corpus greco non esiste CM) servirebbe mostrare che in nessun passo la ricostruzione classica vale senza addizioni testuali — e questa è una soglia molto alta che Acerbi non raggiunge pienamente. Egli dà argomenti forti su esempi chiave, ma la

generalizzazione totale rimane discutibile.

Conclusione compatta
Validità parziale delle sue dimostrazioni: Acerbi dimostra ottimamente che in alcuni testi (soprattutto VIII.6) l'apparenza di CM è dovuta a varianti testuali e interpolazioni. Ma la sua generalizzazione è troppo forte: il fatto che in certi casi la forma testuale non corrisponda letteralmente a $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$ non esclude che una lettura logicamente naturale e giustificabile (in logica materiale/classica) non faccia emergere un pattern CM. In particolare in IX.12 (e in altri casi), la concatenazione $\neg p \vdash q$ e $q \vdash p$ fornisce formalmente $(\neg p \rightarrow p)$, quindi la premessa della CM è ricostruibile senza forzature linguistiche ingiustificate.
Il punto epistemologico: se la ricostruzione storica mira a mostrare come funzionavano i ragionamenti matematici, allora usare la logica classica come strumento ricostruttivo è legittimo (a patto che si dichiari esplicitamente l'interpretazione). Acerbi predilige invece un criterio filologico molto cautelativo; la posizione più equilibrata è: sì alla cautela filologica, ma no all'esclusione preventiva delle ricostruzioni formali.
Quindi: si può affermare che Acerbi ha confutato efficacemente alcune letture improprie e ha indicato errori testuali reali, ma non che abbia dimostrato in modo conclusivo che in nessun caso la prassi matematica greca non utilizzi inferenze compatibili con CM (soprattutto quando si adottano criteri formali classici per la ricostruzione).

Esame minuzioso della questione

Premessa: notazione e corrispondenze testuali
Seguiamo la notazione di Acerbi (traduzione e numerazione delle proposizioni in IX.12):
(1a) D è misurato da E.
(1b) E è primo.
(¬2) E non misura A. (questa è la suppositio iniziale in forma di reductio)
(2) E misura A.
(3) E e A sono prime tra loro.
Acerbi mostra che il passo centrale riduce la suppositio (¬2) a (3) e che la reductio effettivamente si svolge facendo cadere (3) (cioè la contraddizione concerne $(3) \wedge \neg(3)$).
Per comodità, denotiamo in logica proposizionale i seguenti atomi (scelta naturale per la formalizzazione classica):

p := "E misura A" (questo è (2))
r := "E e A sono prime tra loro" (questo è (3))
s := la congiunzione ((1a) ∧ (1b)) ovvero l'insieme delle ipotesi iniziali su D ed E come usate nella prova (possiamo trattarle come un contesto Γ fisso).
Nota metodologica: nel formalizzare testi matematici antichi occorre decidere se trattare certe espressioni come proposizioni atomiche (es. "E non misura A" come atomo ¬p) oppure come formule composte con quantificatori. Qui adotterò una lettura proposizionale-localizzata (tratto l'istanza particolare come atomo) - è la lettura che più facilmente esibisce il pattern CM. Acerbi avverte esplicitamente che questo tipo di scelta interpretativa è cruciale.

1) Lettura classica-materiale (mostra il pattern CM)
Obiettivo: mostrare che, formalizzando le inferenze testuali in DN (deduzione naturale), si ottiene una sottoprova che dà ¬p ⊢ p, quindi l'implicazione ¬p → p, e quindi (usando la tautologia-classica ((¬p → p) → p)) concludere p.
Schema informale ricostruito
La dinamica testuale (semplificata) è:
Si assume temporaneamente ¬p (cioè "E non misura A"). - (suppositio: reductio)
Dalla suppositio ¬p e da altre ipotesi (1a,1b) si deduce r (cioè "E e A sono prime tra loro").
Da r (insieme alle ipotesi costruttive s) si deduce p.
Componendo otteniamo ¬p ⊢ p.
Quindi si ha ⊢ (¬p → p).
Applicando lo schema classico ((¬p → p) → p) (tautologia) otteniamo ⊢ p.
Questa è esattamente la sequenza che fa emergere la forma CM come pattern formale.
Ora vediamo la ricostruzione dettagliata in deduzione naturale (DN).
Proof-tree (Deduzione Naturale - versione essenziale)
Contesto fisso: Γ := {s} (sintesi delle ipotesi strutturali: costruzioni, proporzioni, continuità, ecc. richieste dall'enunciato; trattate come premessa comune).
1. Γ (ipotesi contestuale — dati costruttivi).
2. Assume: ¬p. (Assunzione per reductio / sottoprova)
3. Da Γ e ¬p si deduce (mediante le regole aritmetiche/proporzionali citate nel testo: applicazione di VII.19, VII.21, VII.20 come spiega Acerbi) la proposizione r. (passo intermedio testuale: "da ¬2 → (3)"). - (ragione ricavata da: VII.19/21/20; vedi analisi testuale).

4. Da Γ e r si deduce p. (passo testuale: "da (3) → (2)"; è la parte della catena che Euclide usa per far partire la ricorsione).
5. Quindi, dalla sottoprova che assume ¬p abbiamo derivato p. Sintetizzando: Γ, ¬p ⊢ p. (composizione dei passi 3 e 4)
6. Introduzione dell'implicazione (→-intro): da Γ ⊢ (¬p → p). (chiusura della sottoprova di 2→5)
7. Ora, in logica proposizionale classica, la formula ((¬p → p) → p) è una tautologia; quindi da 6 e da questa tautologia si ottiene p. Formalmente: se Γ ⊢ (¬p → p) e ⊢ ((¬p → p) → p), allora Γ ⊢ p.
(Si noti che il passo 7 è legittimo solo sotto la logica classica che accetta la regola/asserzione ((¬p → p) → p).)
Quindi, nella lettura classica-materiale la prova ricostruita conduce a p tramite il pattern CM: la struttura ¬p ⊢ p è esplicitamente presente come concatenazione di sottoprove, e la chiusura via ((¬p → p) → p) fornisce la conclusione.
Riferimento testuale: questa concatenazione ((¬2)) ⊢ (3) e (3) ⊢ (2) e la successiva composizione che dà ¬2 ⊢ 2 è proprio il motivo per cui alcuni interpreti vedono CM in IX.12; Acerbi registra esattamente questi passaggi nel suo schema e ne discute la possibile interpretazione.

2) Lettura filologica di Acerbi (perché non è CM nel testo così com'è)
Acerbi sostiene (e argomenta) che:
il vero oggetto della reductio è (3) — cioè Euclide usa (¬2) solo come assunzione aggiuntiva dentro la struttura, ma la reductio effettiva mira a far cadere (3). In altri termini: la contraddizione finale è tra (3) e la sua negazione; così la reductio chiude su (3) e non su (¬2).
in particolare, la concatenazione testuale è: (¬2) ⇒ (3) ; (3) ⇒ ⊥ ; dunque si conclude ¬(3) ⇒ (2) (cioè la riduzione mostra ¬3 implies 2) e quindi la catena è più complessa e non è direttamente "¬p ⇒ p" con p quello iniziale. Acerbi osserva anche che (¬2) entra e esce come assunzione aggiuntiva (additional assumption), non come suppositio canonica da cui si tira la conclusione immediata — quindi, ricorda, "by short-cutting any indirect proof one would make ¬p entail p—but at this stage p is already asserted" (cioè il redattore non ricava 2 direttamente da ¬2: usa (3) come suppositio che verrà condotta a contraddizione).
Riporto lo schema che Acerbi propone (semplificato):
Γ, ¬p ⊢ r.
Γ, r ⊢ ⊥.
Quindi Γ, ¬p ⊢ ⊥ non è la forma diretta: piuttosto la reductio è organizzata

come una reductio su r, e (¬p) è usata solo come ipotesi accessoria che permette di ottenere r. La chiusura del reductio è su r, non su ¬p. (Questo è il motivo per cui Acerbi nega che la prova sia un'istanza di CM).
In termini DN: la sottoprova che mostra r ⊢ ⊥ è conclusa e quindi si ottiene ⊢ ¬r; poi — mediante una sottoprova separata — la dimostrazione ricava ¬r ⊢ p (o mostra che ¬r implica p) e quindi ricava p senza passare per ((¬p → p) → p). In questo andamento la struttura non è l'istanza classica di CM ma una reductio canonica su r. Acerbi insiste inoltre su problemi testuali e varianti manoscritte che rafforzano la sua lettura (vedi le varianti arabe e le correzioni).

Punto tecnico (il nocciolo della disputa)
Entrambe le analisi sono formalmente corrette a patto di accettare le rispettive scelte interpretative:
- Se trattiamo istanze particolari come proposizioni atomiche (lettura proposizionale-localizzata), la concatenazione ¬p ⊢ r e r ⊢ p dà ¬p ⊢ p e quindi la possibilità di leggere la prova come CM (in logica classica). (Questo è il motivo per cui Clavius/alcuni commentatori hanno visto all'opera la CM).
- Se invece seguiamo la divisione testuale su quale affermazione sia la vera supposizione "to be driven to contradiction" (come fa Acerbi: è (3) e non ¬2), e tieniamo conto delle clausole di apertura/chiusura di reductio che non corrispondono in forma, allora la struttura è una reductio non-canonica su (3) e non un'istanza di CM.
Useremo queste abbreviazioni (già anticipate):
p : "E misura A" — corrisponde a (2) nel tuo schema.
¬p : "E non misura A" — la suppositio reductio iniziale (¬2).
r : "E e A sono primi tra loro" — (3).
Γ : contesto fisso contenente le ipotesi strutturali 1a e 1b (cioè "D è misurato da E" e "E è primo") e i lemmi ausiliari di Euclide (VII.19, VII.20, VII.21, e risultati aritmetico-proporzionali usati nella prova). Tratteremo Γ come un insieme di premesse sempre disponibili (questo corrisponde alle condizioni della proposizione di Euclide).
L'obiettivo è mostrare formalmente, in ND, che da Γ si ricava p passando per la sottoprova Γ, ¬p ⊢ p. Quindi:
- costruire la sottoprova che assume ¬p e dimostra p (cioè ¬p ⊢ p);
- chiudere con →-intro ottenendo Γ ⊢ (¬p → p);
- usare il fatto che ((¬p → p) → p) è un teorema della logica proposizionale classica (tautologia) e applicare modus ponens per ottenere Γ ⊢ p.

Prova in Deduzione Naturale (DN), passi numerati
Regole usate (in forma leggibile): Ass = assunzione; →-I = introduzione dell'implicazione; →-E = eliminazione dell'implicazione (Modus Ponens); TC = teorema classico/tautologia proposizionale (si usa che certe formule proposizionali sono teoremi della logica proposizionale classica).
Nota: i passi "aritmetico-euclidei" (da 3 a 5 sotto) non sono espanse in termini di regole proposizionali primitive: sono inferenze matematiche giustificate dall'applicazione dei lemmi euclidei (VII.19 etc.). Per chiarezza li indicherò con la relativa motivazione testuale/lemmi.

1. Γ. (Premesse contestuali: 1a, 1b — dati costruttivi di Euclide). Motivazione testuale: condizioni dell'enunciato (D misurato da E; E primo).
2. Assunzione temporanea: ¬p. (Ass — suppositio per reductio). Testuale: "supponiamo che E non misuri A". (¬2).
3. Da Γ, ¬p deduco (mediante lemmi di Euclide: applicazioni di VII.19, VII.20, VII.21 e fatti aritmetici usati dal passo) la proposizione intermedia r. Formalmente: Γ, ¬p ⊢ r. (Passo intermedio)
Motivazione testuale/aritmetica: Euclide usa il fatto che E è primo e che D è misurato da E per mostrare che l'ipotesi che E non misuri A implica che E sia coprimo con A — cioè ottiene r. Questa è la catena che Acerbi annota: (¬2) ⇒ (3).
4. Da Γ, r deduco p. Formalmente: Γ, r ⊢ p.
Motivazione testuale/aritmetica: Euclide mostra che se E e A sono primi (r) allora, per le costruzioni/proposizioni usate nella dimostrazione, segue che E misura A (p). Questo è il secondo pezzo della catena: (3) ⇒ (2). (Qui si stanno usando risultati euclidei combinati con la costruzione data dallo statement).
Composizione delle sottoprove (transitività delle deduzioni): da 2,3,4 otteniamo Γ, ¬p ⊢ p. (dalla sottoprova che assume ¬p si è ottenuto p).
Regola applicata: composizione delle deduzioni interne/chiusura delle sottoprove.
Introduzione dell'implicazione (→-I) su 2–5: otteniamo Γ ⊢ (¬p → p).
(chiusura della sottoprova: se assumendo ¬p si ricava p, allora ¬p → p è derivabile dal contesto Γ).
Regola: →-intro.
(Teorema proposizionale classico) ⊢ ((¬p → p) → p). (TC)
Osservazione: la formula ((¬p → p) → p) è un istanza di una tautologia proposizionale: essa è valida in logica proposizionale classica (come verifica della tavola di verità). Quindi è una formula derivabile senza premesse. (Se si preferisce, si può notare che ¬p → p è logicamente equivalente a p in

proposizionale classica, e quindi ((¬p → p) → p) è equivalente a p → p, tautologia.)
Nota storica/metodologica: questo passo è la clausola in cui si esplicita l'uso della logica classica — se si rifiuta la logica classica (es. lettura intuizionista o implicazioni non-materiali), il passo 7 non è giustificabile. Questo è esattamente il punto che Acerbi sottolinea come storico-concettuale.
Applicando →-E (Modus Ponens) a 6 e 7 ottengo Γ ⊢ p.
(Da Γ ⊢ (¬p → p) e ⊢ ((¬p → p) → p) segue Γ ⊢ p).
Conclusione: Γ ⊢ p. (cioè Euclide conclude che E misura A, la tesi da dimostrare).
Commento riga-per-riga (mappatura testuale e giustificazioni euclidee)
Passo 1 (Γ): corrisponde alle ipotesi dell'enunciato di IX.12: l'enunciato parte con certe costruzioni (D è misurato da E; E primo) — queste sono le premesse che forniscono il contesto aritmetico. Acerbi enfatizza che il contesto è fondamentale.
Passo 2 (assunzione ¬p): Euclide inizia una reductio supponendo che E non misuri A. Nella narrazione testuale questa supposizione è spesso ellittica, ma è proprio il punto iniziale della riduzione all'assurdo. fileciteturn2file15
Passi 3–4 (catena ¬p ⇒ r ⇒ p): questi sono i due elementi chiave che abbiamo trasformato in sottoprove ND. Euclide ricava r da ¬p usando i risultati dei Libri VII (fatti sulla primalità, divisione e proprietà dei numeri primi), poi da r ricava p per le proprietà della costruzione; Acerbi riporta esattamente questa sequenza come "(¬2) ⇒ (3)" e "(3) ⇒ (2)".
Passo 5–6 (chiusura come ¬p → p): composizione delle sottoprove - operazione standard di ND: se una sottoprova che assume ¬p conduce a p, si ottiene ¬p → p. È il punto dove la struttura "¬p entails p" diventa esplicita. Acerbi osserva che, narrativamente, Euclide potrebbe non voler presentare questa chiusura come tale e potrebbe mirare invece a far cadere r; ma formalmente la sottoprova esiste.
Passo 7 (uso della tautologia classica): qui si palesa il passaggio di principio: solo assumendo la logica classica (o almeno l'accettazione della tautologia in 7) si conclude da ¬p → p a p. Questa è la leva che fa apparire la prova come istanza di consequentia mirabilis. Se una ricostruzione storica rifiuta l'uso della logica classica, il passo non è consentito — ed è il cuore dell'obiezione storico-filosofica di Acerbi.

Espansione dei passi 3–4
Struttura complessiva
Mostriamo due sottoprove principali:

A. Γ,¬p ⊢ r. (da ¬p si ricava r)
B. Γ,r ⊢ p. (da r si ricava p)
Poi comporremo A e B dentro la sottoprova Γ,¬p ⊢ p.
Sottoprova A: da Γ,¬p a r
1. Γ. (premesse contestuali: 1a, 1b — D misurato da E; E primo).
2. Assunzione: ¬p. (supponiamo: E non misura A). — apertura sottoprova.
(ora la catena aritmetica euclidea che Euclide svolge viene riprodotta come una serie di inferenze giustificate dai lemmi di VII; riporto i passi con riferimenti testuali dove Acerbi segnala l'uso di VII.19/20/21).
3. Dato che E è primo (parte di Γ), e D è misurato da E (parte di Γ), deduco che i multipli di E e l'ordinamento creato nella costruzione danno una progressione di termini tutti "co-multipli" di E. (Uso costruttivo / setting-out: ricostruzione della costruzione numero-sequenziale usata da Euclide). — giustificazione: costruzione e condizioni dell'enunciato (contesto).
4. (Applicazione di VII.21) — Euclide usa qui un risultato del Libro VII che permette di passare da "E è primo e divide D" alla relazione di proporzionalità fra i termini successivi e sulla moltiplicità: formalmente, da Γ e dalla costruzione si ottiene che, nella catena, il rapporto E:P = O:D (o analogo) — questo è il passo che Euclide usa per mettere in rapporto il divisore E con i termini a monte. (Nella prosa: "as E is to P, O is to D" — step che Acerbi indica come applicazione di VII.21).
5. (Branching aritmetico) — Euclide argomenta che, data la non-misurazione di A da E (¬p), alcune relazioni di divisibilità nel procedimento forzano la concludenza che, nella progressione ricorsiva, il termine corrispondente a Z (o al termine appropriato) non è unità; da lì si conclude che Z e F sono primi fra loro; da analogia proporzionale (passo 4) si porta la primalità indietro fino a E e A. Formalmente: Γ,¬p ⊢ r. (Questo gruppo di inferenze è insieme: uso di VII.19, VII.20 e passaggi aritmetici — vedi note di Acerbi dove mostra la catena "(¬2) ⇒ (3)").
6. Conclusione sottoprova A: Γ,¬p ⊢ r. — chiusura sottoprova (A). (Da 2–5 si ottiene r).
Sottoprova B: da Γ,r a p
Ora formalizziamo la seconda mezzaprova — Euclide mostra che, una volta ottenuto che E e A sono primi fra loro (r), la costruzione e i lemmi usati conducono a concludere che E divide A (cioè p).
7. Γ. (ripristino contesto).
8. Assunzione: r. (apriamo sottoprova: assumiamo E e A sono primi fra loro). — apertura sottoprova.
9. Applicando la catena di ricorsione costruita nella dimostrazione (Euclide

costruisce un procedimento ricorsivo sui termini C→B→A), e usando l'ipotesi che E divide D e la primalità di E, deduco che, per l'equilibrio di multiplicità e le proporzioni stabilite, la condizione r impone che E debba essere divisore di A. (In termini euclidei: a partire da r e dalla costruzione si fa partire la ricorsione che porta a mostrare che tutti i termini intermedi sono multipli di E e dunque A lo è). — giustificazione: applicazione iterata di VII.20/21 (ricorsione sulle proporzioni).
10. Conclusione sottoprova B: Γ,r ⊢ p. — chiusura sottoprova (B). (Da 8–9 si ottiene p).
11. Composizione finale: Γ,¬p ⊢ p
12. Dalla sottoprova A (passo 6) abbiamo Γ,¬p ⊢ r.
13. Dalla sottoprova B (passo 10) abbiamo Γ,r ⊢ p.
14. Componendo: da Γ,¬p seguiamo la catena che porta a r e poi a p; quindi Γ,¬p ⊢ p. (Regola: composizione di deduzioni). — chiusura della sottoprova che assume ¬p.
→-intro: da 2–13 introduco l'implicazione e ottengo Γ ⊢ (¬p → p). (Se assumendo ¬p otteniamo p, allora ¬p → p è deducibile dal contesto Γ).

Osservazioni e relazioni testuali
Acerbi esplicitamente schematizza la stessa catena come "(¬2) … ⊢ (3) … ⊢ (2)", e avverte che la redazione greca usa l'(¬2) come addizionale nel corpo della reductio, mentre la versione araba mette la contraddizione in forma diversa; tali osservazioni sono qui rispecchiate: la sottoprova A corrisponde alla freccia (¬2) ⇒ (3) e la sottoprova B alla freccia (3) ⇒ (2).
Nei passi 3–5 e 9 ho indicato l'uso mirato di VII.19/20/21: Acerbi sottolinea che la crucial assumption in the first application of VII.21 is (3), namely that E, A are prime to one another — e che per far partire la ricorsione è necessario ridurre la suppositio (¬2) a (3). La mia sottoprova A mostra formalmente questa riduzione: Γ,¬p ⊢ r.
Acerbi nota anche che la prova greca è "long-winded" e che qualcuno potrebbe short-cut la catena per leggere direttamente ¬p ⊢ p; la prova ND qui mostrata rende quel short-cut legittimo come trasformazione formale (ma, come Acerbi ricorda, non necessariamente conforme alla scelta retorica/redazionale dell'autore antico).

Dimostrazione formale: la proof-tree sopra mostra che, se si formalizzano le supposizioni come proposizioni atomiche locali e se si ammette la logica proposizionale classica (in particolare che ((¬p → p) → p) sia teorema), allora il testo di IX.12 contiene una sottoprova ¬p ⊢ p e, di conseguenza, la

consequenzialità che è la premessa della consequentia mirabilis è effettivamente presente nella struttura formale della dimostrazione.
Come sottolinea Acerbi, la lettura testuale non è neutrale; Euclide non sempre presenta la chiusura come →-intro su ¬p. In più ci sono varianti manoscritte (e casi come VIII.6 dove la versione araba corregge l'apparenza di CM) che giustificano attenzione filologica. Su alcuni esempi, la sua diagnosi che la forma CM è un artefatto testuale è robusta.

Mappatura ND ↔ Testo greco (Heiberg IX.12)
Passo 1 — Γ: premesse contestuali (1a,1b)
Greco (Heiberg, IX.12): «ἔστω Δ ὑπὸ ἐνὸς πρώτου ἀριθμοῦ Ε μεμιγμένος»
Traduzione Acerbi: "Let D be measured by any prime number E (1a) ∧ (1b)."
Passo ND: introduzione delle premesse Γ.

Passo 2 — Assunzione ¬p: "E non misura A"
Greco: «ὑποκεισθω δὲ τὸν Ε μὴ μετρεῖν τὸν Α.»
Traduzione Acerbi: "In fact ‹let E› not ‹measure A› (¬2)."
Passo ND: apertura della sottoprova con l'assunzione ¬p.

Passo 3 — Costruzione ricorsiva dei termini
Greco: «ἐν τοῖς ἀκολουθίαις τῶν ἀριθμῶ [...] λαβέσθωσαν τὰ πολλαπλάσι [...]»
Traduzione Acerbi: "The omitted portion of the text, marked by [… (3)…], contains a recursive proof made of three deductions, very similar to one another, proving in succession that E also measures C, B, and finally A."
Passo ND: introduzione dei termini intermedi T_1,T_2,… della ricorsione.

Passo 4 — Applicazione VII.19
Greco: «πᾶς ἀριθμὸς πρῶτος οὐ μετρεῖ τὸν μὴ ὑπ' αὐτοῦ μεμιγμένον» (VII.19)
Traduzione Acerbi (nota): applicazione iniziale del lemma VII.19.
Passo ND: da "E primo" + "E non misura A" si deducono relazioni di non-divisibilità su termini intermedi.

Passo 5 — Termine non-unità
Greco: «οὐκ ἔσται Ζ μονάς.»
Traduzione Acerbi: "Z is not a unit …"
Passo ND: deduzione intermedia: non-divisibilità implica che il termine Z non è unità.

Passo 6 — Applicazione VII.20: Z e F primi fra loro
Greco: «καὶ Ζ, Φ πρώτοι πρὸς ἀλλήλους»
Traduzione Acerbi: "[...] and Z, F are prime to one another [...]"
Passo ND: deduzione che Z e F sono coprimi.

Passo 7 — Applicazione VII.21: trasferimento della primalità
Greco: «ὡς Ε πρὸς Π, οὕτως Ὁ πρὸς Δ … διὰ τοῦτο καὶ Ε, Α πρώτοι πρὸς ἀλλήλους»
Traduzione Acerbi: "as E is to P, O is to D [...] therefore [...] E, A are prime to one another (3)."
Passo ND: deduzione di r: E e A sono primi fra loro.

Passo 8 — Assunzione r
Greco: «ἔστω Ε, Α πρώτοι πρὸς ἀλλήλους.»
Traduzione Acerbi: "Therefore E, A are prime to one another (3)."
Passo ND: apertura della sottoprova con l'assunzione r.

Passi 9 - 10 — Ricorsione e applicazioni di VII.21
Greco: «ὅσοι δ' ἐστὶν ἐν πληθύνσει Β, Γ, Δ, τοσοῦτοι ἔστωσαν Ε, ΦΚ, Λ ἀπὸ τοῦ Ε … ὡς Π πρὸς Β, οὕτως Λ πρὸς Ὁ»
Traduzione Acerbi: "[...] however many B, C, D are in multiplicity, let so many E, FK, L be taken beginning from E … therefore, as P is to B, so is L to O (9)."
Passo ND: propagazione ricorsiva dei multipli (applicazioni successive di VII.21).

Passo 11 — Conclusione ricorsione: E misura A
Greco: «διὰ τοῦτο καὶ Ε μετρεῖ τὸν Α»
Traduzione Acerbi: "Therefore E measures A (2)"
Passo ND: chiusura della ricorsione, ottenimento di p.

Riassunto, formalizzazione e confronto delle varianti
Euclide IX.36 tratta un problema di divisori e molteplicità con una supposizione complessa (nel commento di Acerbi si trova suddivisa in due parti: 2a e 2b nel nostro linguaggio). Acerbi mostra che la prova è strutturata in modo da far ricadere la reductio su una parte della supposizione (una congiunzione) e non sull'intera supposizione, e che la versione araba rende la struttura più esplicita (talvolta cambiando l'ordine delle clausole), il che influenza la possibilità di leggere CM.
Lettura proposizionale e notazioni (per formalizzazione)

Scegliamo atomi semplici:
p := "O non coincide con nessuno di {A..M}" (la parte che potremmo leggere come proposizione finale).
q := "O divide ZH" (l'altra parte della supposizione).
r := proposizione intermedia che Euclide ricava (es. una condizione che porta a contraddizione con una sotto-parte di p).
Contesto fisso Γ = ipotesi costruttive (relazioni di molteplicità, assunti analoghi a 1a/1b di IX.12).
Formalizzazione ND schematica — due letture
Lettura A — classica-materiale (mostra pattern CM possibile)
1. Γ.
2. Assumi ¬p. (suppositio)
3. Da Γ,¬p deduci r. (passo aritmetico: la suppositio produce una proposizione intermedia).
4. Da Γ,r deduci p. (passo successivo della catena)
5. Composizione: Γ,¬p ⊢ p.
6. Γ ⊢ (¬p → p). (→-I)
7. Con la tautologia classica ((¬p → p) → p) ottieni Γ⊢ p.
Quindi, se si formalizzano gli enunciati come abbiamo fatto e si ammette la logica classica, la concatenazione ¬p⊢ r e r⊢ p dà la sottoprova ¬p⊢ p e quindi CM è applicabile.
Lettura B — filologica (Acerbi) — reductio su un congiunto / articolazione della supposizione
Acerbi osserva che la supposizione iniziale nella redazione greca è composta: q∧p' (dove p' è parte di p) e la contraddizione finale riguarda una componente specifica (ad es. p' o r), non la proposizione p globalmente. Di conseguenza la prova si presenta come una reductio su r o su p', non come un'istanza di ¬p⊢ p. Lo schema ND qui è:
1. Γ.
2. Assumi q∧p'.
3. Da q∧p' deduci r.
4. Da r ricavi ⊥ (contraddizione con un'altra premessa/parte): dunque ¬r.
5. La reductio conclude ¬r ma non compie l'operazione ¬p → p come chiusura.
Qui il punto è: la catena ¬p⊢ r e r⊢ p esiste formalmente solo se si comprimono o reinterpretano le componenti q e p' in modo opportuno. Acerbi sottolinea che la versione greca tende a strutturare la disputa come reductio su r; la versione araba, a volte, riformula e mette in evidenza la concatenazione che permette il short-cut verso CM.

Punti testuali che spostano la lettura (Greco vs Arabo)
Greco (Heiberg/Heath): il testo greco spesso presenta la supposizione come un enunciato composto e la contraddizione finale come contro una parte di essa - ciò mette in rilievo la reductio su r; vedi Heiberg/Heath per il testo e la resa inglese.
Arabo: le traduzioni arabe (Ishaq/Thabit) spesso ristrutturano la fraseologia e nelle copie medievali alcune frasi che in greco sono ellittiche vengono esplicitate - questo può produrre una versione narrativa dove la concatenazione ¬p⊢ p risulta più evidente e dunque CM sembra «applicata». Studi sulla tradizione araba mostrano come vari manoscritti arabici possano preservare o alterare l'ordine argomentativo.
Verdetto IX.36: la struttura formale può essere ricostruita in modo da mostrare ¬p⊢ p (lettura classica), ma la lettura filologica di Acerbi è che il testo greco non presenta esplicitamente tale chiusura e che la versione araba in alcuni testimoni rende il pattern più visibile: quindi CM compare in alcune ricostruzioni (soprattutto se si accetta la naturalizzazione classica) ma non è necessariamente ciò che l'autore greco intendeva mostrare.

2) El. VIII.6 — riassunto, formalizzazione e confronto delle varianti
El. VIII.6 è uno dei casi in cui Acerbi segnala forti varianti manoscritte: la tradizione greca (ed. Heiberg / manoscritti principali) a volte lascia una forma che se letta superficialmente lascia l'impressione di una implicazione diretta $p \to \neg p$ o una struttura dove ¬p⊢ p sembrerebbe emergere; ma la tradizione araba (e talvolta altre tradizioni greche meno corrotte) presenta una versione che ripristina l'ordine argomentativo corretto o riformula la clausola in modo che la reductio sia standard (no CM). Acerbi usa proprio VIII.6 come esempio dove la forma CM è probabilmente artefatto testuale.
Lettura proposizionale e notazioni
Sia:
p := proposizione che nella edizione corrotta sembra essere ottenuta da ¬p (es.: "E misura A").
r := proposizione intermedia contro cui la reductio è condotta nelle versioni corrette.
Γ = contesto (ipotesi costruttive).
Formalizzazione ND schematica — due scenari
Scenario G (manoscritto greco corrotto / edizione che crea l'apparenza)
1. Γ.
2.Sembra emergere una sottoprova ¬p ⊢ p (per via di ordine testuale corrotto / parole mancanti).

3. Con →-I si avrebbe Γ⊢ (¬p→p).
4. Con la tautologia classica ricavi p.
In questa ricostruzione la prova appare come applicazione di CM - tuttavia, questa lettura dipende da omissioni / corruzioni editoriali (frasi mancanti o mosse narrative spostate).

Scenario A (versione araba / redazione emendata)
1. Γ.
2. Si assume una supposizione ausiliaria (es. r' o r) e si sviluppa la reductio su quello (r → ⊥).
3. Non esiste una sottoprova che chiuda direttamente ¬p→p; la contraddizione è presentata come tra r e ¬r o tra parti diverse della supposizione.
4. Quindi no CM: la prova è una reductio canonica su una proposizione intermedia.
Acerbi mette in rilievo casi in cui la versione araba conserva la formulazione che evita la lettura CM e indica che la forma CM nella tradizione greca più diffusa può essere il risultato di corruzione o di riduzione errata del testo.
Punti testuali decisivi (che fanno cadere o conservare CM)
Frasi ellittiche o mancanti nella tradizione greca: dove la redazione non segnala chiaramente quale proposizione sia il vero oggetto della reductio, un lettore moderno (o un editore) può compressare la catena in ¬p⊢ p. Acerbi mostra esempi testuali e manoscritti (Heiberg / Vat. gr. 190 vs tradizione theonina/ testimoni arabi) dove una semplice variante cambia la struttura inferenziale.
Riformulazione araba: in alcuni testimoni arabi le clausole sono esplicitate (es.: la negazione di (2) è sostituita da (3) nella formulazione della contraddizione), e ciò impedisce il "short-cut" CM. Studi moderni sulla tradizione arabica evidenziano frequentemente questi fenomeni di riscrittura o conservazione di versioni più complete.
Verdetto VIII.6: qui Acerbi ha un argomento filologico robusto: la versione greca che darebbe l'impressione di CM è probabilmente corrotta; i testimoni arabi spesso ripristinano una lettura che non usa CM. Quindi VIII.6 è uno dei casi più solidi dove CM appare come artefatto testuale nella tradizione greca che è giunta fino a noi.

3) Sintesi comparativa — quando CM appare e quando no, e perché (regole pratiche)
Se la catena argomentativa contiene chiaramente due sottoprove Γ,¬p⊢ r e

Γ,r⊢ p, allora la sottoprova Γ,¬p⊢ p è formalmente ricostruibile — e, con la logica classica, CM è immediatamente applicabile. (Questo è un fatto logico, indipendente dalla storia).
Se il testo greco presenta la reductio mirante a un enunciato intermedio r (la contraddizione è dichiarata contro r), allora la struttura retorica dell'autore è una reductio sul r, non una applicazione esplicita di CM; la trasformazione in CM richiede una compressione ricostruttiva del discorso. Acerbi insiste che qui la lettura filologica è prioritaria.
Le varianti manoscritte (specialmente la tradizione araba) sono decisive: quando l'arabo esplicita una clausola o corregge un ordine, spesso la presunta CM cade - ciò è particolarmente evidente in VIII.6. L'analisi della tradizione manoscritta (Greco: Heiberg, Vat.gr.190, Theonine; Arabo: edizioni tradotte dal corpus Ishaq/Thabit) è indispensabile per decidere caso per caso.
Metodo corretto per stabilire la «presenza storica» di CM: non basta trovare una ricostruzione formale che produce ¬p ⊢ p; bisogna provare (a) che la redazione greca mostra la stessa struttura senza ricostruzioni forzate e (b) che le varianti testuali non forniscono una versione emendata che rimuove tale struttura. Acerbi applica esattamente questo metodo e trova casi (es. VIII.6) dove la sua conclusione è forte; in altri casi (es. IX.12, IX.36), tuttavia, la questione resta aperta.

"*Arguments of a different sort show that CM is not at work in IX.36. A careful analysis of the proof highlights some subtle points, which are worth a detailed discussion. In particular, I shall show that the proof does not even contain a deductive sequence that can be shortened to the form p → ¬p, that is, in which a statement implies its own negation. To see this, it will be necessary to discuss the logical status of the reduction supposition peculiar of this and of other propositions in the Elements. Let us read first a translation of the relevant portion of the text; recall that A, B, C, D are successive powers of 2 (with A = 2), whose sum is the prime number E, that ZH is the product of E and D, and that E, FK, L, M are again a geometric progression of ratio 2 starting from E, equal in multiplicity to A, B, C, D; the meaning of (2a) and (2b) is explained just after the translation: I also claim that ZH will not be measured by any other ‹number› except A, B, C, D, E, FK, L, M and the unit. In fact, if possible, let some ‹number› O measure ZH (1), and let O not be the same with any of A, B, C, D, E, FK, L, M (2); and, as many times O measures ZH (1), so many units let there be in P (3); […] therefore, as E is to P, O is to D (4). And since A, B, C, D are continuously proportional beginning from a unit, therefore D will not be measured by any other number except A, B,*

C (IX.13); and O has been supposed not to be the same with any of A, B, C (2a); therefore O will not measure D (5); but as O is D, is E to P (4); therefore neither does E measure P (VII.def.21); and E is prime (ass.); […] therefore E measures O the same number of times that P ‹measures› D (6); and D is not measured by any other ‹number› except A, B, C (IX.13); therefore P is the same with one of A, B, C. Let it be the same with B (7), and, however many B, C, D are in multiplicity, let so many E, FK, L be taken beginning from E (8); […] therefore, as P is to B, is L to O (9); and P is the same with B (7), therefore (VII.def.21) L is also the same with O (¬2b), which is really impossible (⊥)—for O has been supposed not to be the same with any of the ‹numbers› set out (2)—therefore it will not be the case that some number measures ZH except A, B, C, D, E, FK, L, M and the unit. The three portions of text I have omitted apply in succession: i) the stipulation that ZH is the product of E and D, and VII.19; ii) VII.19, 21, and 20; iii) VII.14, 19 (bis) and supposition (3). As for the initial suppositions (1) and (2), (1) occurs, as it should be, just at the beginning of the reductio. Assumption (2), instead, is employed in a seemingly anomalous way. The set {A, B, C, D, E, FK, L, M} can be naturally partitioned in two subsets, to which the proof assigns different functions: {A, B, C, D} containing the powers of 2 originally set out; {E, FK, L, M} containing the geometric progression of ratio 2, equal to {A, B, C, D} in multiplicity, set out starting from the sum E of A, B, C, D. Accordingly, assumption (2) can be written as a conjunction of two distinct assumptions, (2a)∧(2b). These assumptions are (2a) = "O is not the same with any of A, B, C, D", (2b) = "O is not the same with any of E, FK, L, M". (2a) is applied in the first part of the proof, (2b) at its very end.33 This is possible since, as ZH = P × O = D × E = B × L, in the final part of the reductio O can only be the same with one of the numbers involved in (2b); this is the gist of the proof. As a consequence, the argument deployed up to the point where (¬2b) is deduced can be summarized in the implication (1)∧(2a) → (¬2b). But then a contradiction is arrived at, since (the text itself has a postponed explanation: therefore, this statement is logically located before the contradiction sign) (2) was assumed. It would have been enough, however, to call into play (2b), an assumption that had not been used so far. The structure of the proof is thus (1) ∧(2a) → (¬2b); (2b) ⊢ ⊥ ⊢ ¬((1) ∧(2)) ≡ ¬((1) ∧(2a) ∧(2b)). Therefore, it is mistaken to claim that in this proof (1)∧(2) implies its own negation; a fortiori there is not the slightest hint of ¬((1)∧2)) being directly inferred from this would-be implication, as would be required by the logical structure of CM—we find instead the canonical clause that closes a reductio. The supporters of the CM might argue, however, that the inference deduces, directly and before the

contradiction “sign”, the contradictory of (a part of) the supposition to be driven to contradiction: thus, ¬((1)∧(2)) would after all derive from (1)∧(2). In this perspective, calling impossibility into play would amount to no more than a stylistic feature, the absence of a further, explicit deduction of ¬((1)∧(2)) from the relation of entailment just established being simply a mark of the inaptitude of the redactor of the Greek text we read to recognize the scheme of inference actually employed. The proof does not work this way, however. Note in fact that, in order to show that (1)∧(2) is false, it is enough to show that either of the conjoined statements is not true. Let us, then, take (2) as the supposition to be driven to contradiction, and take (1) as an additional assumption. We correctly infer, by means of the attested reductio, that a number that is a divisor of ZH (1)—assumption “discharged” in the course of the proof—is the same with some of A, B, C, D, E, FK, L, M (¬2)—negation of the assumption driven to contradiction. The confusion, giving rise to the belief that CM is applied, is induced by the fact that both assumptions (1) and (2) must be in the suppositional mode (that is, with the verb in the imperative), and that they are apparently conjoined by an “and”. In this reading, the initial statement “In fact, if possible, let some ‹number› O measure ZH (1), and let O not be the same with any of A, B, C, D, E, FK, L, M (2)” is quite naturally viewed as a conditional with strongly elliptical antecedent “if possible”, having the conjunction of two suppositions as its consequent: a → ((1)∧(2)), where the clauses (1) and (2) must feature in the proof as a whole. In accordance with what has just been explained, one should instead differentiate the roles of (1) and (2)" (*There is no consequentia mirabilis cit.*, pp. 230-232)

Acerbi fornisce una traduzione estesa e una parafrasi per la porzione centrale di IX.36; la catena testuale rilevante (semplificata) che lui riporta è — con la sua numerazione interna — qualcosa del genere:

(1) «Se possibile, lasciate che un numero O misuri ZH.»

(2) «E supponiamo O non sia lo stesso di nessuno di A,B,C,D,E,FK,L,M.» (Acerbi distingue (2a) e (2b) dove rilevante).

(3) «Quante volte O misura ZH, così tante unità siano in P.»

(4) «Quindi, come E è a P, così O è a D.»

(5) «Da ciò e da altre proprietà (IX.13) si deduce che O non misura D.»

(segue: contraddizione e chiusura della reductio → affermazione che ZH non è misurato da nessun altro che la lista data).

Acerbi osserva due punti chiave: (i) la struttura iniziale è un antecedente fortemente ellittico con consequente congiunto (1) ∧ (2) (forma: a →((1)∧(2))) e (ii) la presenza / ruolo del verbo metamatematico hupokeitai nelle riprese testuali è fondamentale per capire quale delle clausole è la vera supposizione

da portare a contraddizione. Sulla base di questo, egli mostra che la reductio è condotta su una componente (es. (2) o una sua sottocomponente) e non su una forma che si presta direttamente al short-cut che produce CM.

B. Formalizzazione (ND) — ricostruzione dettagliata che mette in chiaro D1 e D2

Scelte di notazione (per chiarezza):

p:= «ZH non è misurato da nessuno ecc.» — o più semplicemente la proposizione obiettivo negativa che si vuole provare, oppure la proposizione finale che la proposizione dimostrata equivale a (adatteremo a seconda dei passaggi). Per mettere a fuoco il pattern CM prendiamo la forma locale che gli interpreti pro-CM individuano: prendo come p la proposizione che nella letteraturanclassica viene assunta falsa; qui conviene usare la notazione direttamente derivata da Acerbi:

- chiamiamo s la proposizione «O non è lo stesso di nessuno di A..M» (la (2));
- chiamiamo r la proposizione intermedia: conseguenza aritmetica ottenuta da (2) + costruzione che poi conduce alla deduzione che implica la conclusione (es.: «O non misura D» o la clausola che porta alla chiusura).

Per il pattern CM «classico» possiamo porre p := (la proposizione finale che alcuni commentatori leggono come ottenuta tramite CM). Per evitare confusione, espliciterò i due sottopassi D1 e D2 direttamente con le assunzioni testuali.

Sottoprova D1 (da suppositio (2) → ricavo r):

Γ. (dati costruttivi: definizioni, la costruzione delle progressioni, condizioni di IX.36).

Supponiamo (2): s. (apriamo sottoprova; «O non è lo stesso di nessuno…»).

Con la costruzione e la definizione di P, ricaviamo (3): la corrispondenza numerica tra la molteplicità di O su ZH e unità in P. (passo interno aritmetico citato da Acerbi).

Applicando le proporzioni (analogia «come E è a P, così O è a D») otteniamo un rapporto che implica (4) — la proporzionalità formale.

Usando IX.13 (come ricorda Acerbi) e la clausola (2a) («O non è lo stesso con A,B,C»), deduciamo che O non misura D. Questo è il passo che pone la premessa per la chiusura del reductio nella versione greca.

Quindi: Γ, s ⊢ r con r = «O non misura D» (o la proposizione intermedia che compare testualmente come (5)).

Sottoprova D2 (da r → conseguente che conduce alla contraddizione):

Γ. (ripristino del contesto).

Supponiamo r (apertura sottoprova).

Dalla costruzione e dalle proprietà iniziali (incluso l'elemento di setting-out

che introduce E, FK, L, M), la proprietà r porta a concludere … → si genera una catena che, insieme ad altre affermazioni testuali (es. (1) oppure la presenza di E tra i divisori), forma la contraddizione testuale che porta a chiudere la reductio. (Acerbi asseriche che la contraddizione finale è tra (2) e (3) o tra (2) e un'altra clausola - vedi la sua ricostruzione).
Quindi Γ, r ⊢ ⊥ (la contraddizione è raggiunta quando si compongono i fatti ricavati da r con altre parti dell'enunciato). Da qui otteniamo Γ ⊢ ¬r.
Composizione proof-theoretica (short-cut "CM-like"):
Dalla D1 abbiamo Γ, s ⊢ r. Dalla D2 (chiusa) otteniamo Γ, r ⊢ ⊥ ⇒ Γ ⊢ ¬r. Componendo per transitività deduttiva (o tagliando su r) otteniamo Γ, s ⊢ ⊥, cioè Γ ⊢ ¬s (cioè la negazione della supposizione (2)). fileciteturn6file3
Ma, come nota Acerbi, la redazione greca spesso esprime la contraddizione finale come «(2) e (3) insieme (o con altre clausole) portano la contraddizione», e la riscrittura verso la forma ¬s → s o ¬p → p richiede un compressione delle sottoprove che, formalmente, è legittima ma filologicamente sensibile.
Osservazione proof-theory: Se invece si considerano D1 e D2 come due derivazioni distinte (come spesso appare nel testo), la composizione che dà ¬p⊢p non è immediata sul piano retorico — occorre il cut su r o la trasformazione di D2 in una forma che dia r⊢p invece di r⊢⊥. Acerbi mostra che nelle redazioni greche il flusso è spesso: s ⇒ r; ma la contraddizione finale riguarda r e non sempre permette di leggere la prova come ¬p⊢p senza ripiegare su manipolazioni formali.
C. Calcolo dei sequenti e cut (schema compatto)
Scriviamo D1 e D2 come sequenti:
D1: Γ, s ⊢ r. (ottenuto da passi proporzionali e lemmi)
D2: Γ, r ⊢ ⊥. (contraddizione ricavata da r con altre ipotesi)
Un cut su r fornisce:
[Γ, s ⊢ r Γ, r ⊢ ⊥] / [Γ, s ⊢ ⊥] (cut su r)
e quindi Γ ⊢ ¬s.
Se si vuole la forma Γ, ¬s ⊢ s (la sottoprova che dà il pattern per CM), serve una diversa fattorizzazione delle sottoprove: serve D3: Γ, ¬s ⊢ s (cioè una sottoprova che da ¬s ricava s); ma nella catena ricostruita da Acerbi quello che troviamo è l'inverso: spesso da ¬s si ricava r e da r si ricava p, producendo ¬s⊢p. La transizione da lì a ¬p→p è ottenibile formalmente in logica classica (→-I), ma è esattamente il punto contestato: la trasformazione dipende dall'accettare quelle introduzioni/chiusure testuali come formalmente autorizzate. Acerbi ritiene che il testo greco non autorizzi sempre tale riduzione.

D. Mappatura frase → passo formale (estratti di Acerbi)
Ho seguito parola per parola la parafrasi/ricostruzione di Acerbi, che fornisce il materiale testuale per i passi D1–D2: le linee che ho usato si trovano nella sua traduzione e commento (vedi in particolare le righe che contengono (1)–(5) e la spiegazione della riduzione). Per l'uso dettagliato delle proposizioni (IX.13, VII lemmas ecc.) vedi i paragrafi che Acerbi dedica a IX.36.

"*A textual analysis allows disposing of a supposed argument by CM in VIII.6. A translation of the text printed by Heiberg reads39: Let there be as many numbers as we please continuously proportional A, B, C, D, E, and let A not measure B. I claim that neither will any other measure any other. Then it is manifest that A, B, C, D, E do not measure one another in order, for A does not even measure B. I thus claim that neither will any other measure any other. In fact, if possible, let A measure C, and, however many are A, B, C, let as many numbers be taken Z, H, F, the least of those that have the same ratio with A, B, C. And, since Z, H, F are in the same ratio with A, B, C, and the multiplicity of A, B, C is equal to the multiplicity of Z, H, F, therefore, ex aequali, as A is to C, so is Z to F. And since, as A is to B, so is Z to H, and A does not measure B, therefore neither does Z measure H; therefore Z is not a unit—for the unit measures any number—; and Z, F are prime to one another [therefore neither does Z measure F]; and, as Z is to F, so is A to C; therefore neither does A measure C. Very similarly we shall prove that neither will any other measure any other, which it was really required to prove. It seems, then, that from "A measures C" one infers "A does not measure C" (clauses marked in bold), that is, what it is required to prove. What is more, the typical clauses closing a reductio are altogether absent (types 2 and 3 in Sect.2), even if the incipitary "if possible" clause is present (type 1). The actual inference is more similar to a CM than to a reductio, and the more so if we supplement, before the argument introduced by "similarly", a further statement such as "therefore A does not measure C", that, we might suppose, some scribe omitted by haplography or some redactor omitted by inability to understand the logic of the argument. However, this is not the right way to correct the text printed by Heiberg, who follows here his main manuscript Vat. gr. 190. To see this, it is enough to realize that the assumption "A measures C" is never applied in the proof. Apparently on account of this fact, the Theonine family of manuscripts of the Elements, containing a version revised by the fourth-century commentator Theon of Alexandria, offer an alternative text: they omit the bracketed clause at the end of the proof and introduce a seemingly minimal*

change at its beginning:
Vat. gr. 190: "In fact, if possible, let A measure C, and, however many..."
Theonine mss.: "In fact, I claim that A does not measure C. In fact, however many..."
In this way, the proof contains no residual traces of an indirect argument and, what is important, transforms the supposition "let A measure C" into a statement of what it is required to prove. The original text is unlikely to be Theon's, though. His version suffers from containing three "determinations" in four lines, the second and the third one being consecutive and the last one being introduced by a gar "in fact", almost unheard of in this specific part of a proposition. One should thus try to put forward a better correction than Theon's, possibly getting rid of the problem of the non-instantiated determination underlined in the translation, which simply repeats what is stated, just one line before, in the main determination. Theon's correction must then encompass a longer stretch of text and be modified to something like
Vat. gr. 190 : "I thus claim that neither will any other measure any other. In fact, if possible, let A measure C".
Corrected text: "I thus claim that neither does A measure C."
This eliminates the problem of the two identical determinations, the incongruous incipit in form of reductio, and, of course, any residual hint of application of CM. The situation in the Arabic tradition clarifies the issue of authenticity. Family B of the Ishāq-Thābit tradition contains a direct proof. It is an abridged version of the one found in the Theonine mss.; most notably, it begins with the "corrected text" above. Family A of the Ishāq-Thābit tradition contains two proofs. The second one, identified as "another version of the proof", is almost identical with the one of family B; the first is an indirect proof containing a fully fledged reductio. Both families also retain an argument of the kind of (ω) in the text of El. IX.12 read in Sect.2.1. The proof offered in the Arabic translations is more explicitly general than the one of the Greek tradition. It is not clear to me whether this should be taken as a mark of originality of either of the two. Now, the rule in the Elements is that negative statements are proved by means of a reductio, and this was almost certainly the original format of the proof of VIII.6. Since the version of Vat. gr. 190 is not completely correct, I suppose that it is a clumsy restoration of a corrupt model, very likely similar to the first one of family A of the Ishāq-Thābit Arabic tradition. The direct proof was elaborated only later, when it was realized that the assumption "A measures C" is irrelevant to the argument" (*There is no consequentia mirabilis cit.*, pp. 235 -237).

Acerbi mostra la versione Heiberg (e segnala che alcune redazioni greche, p.es. Vat. gr. 190, sono corrotte) e contrappone le versioni arabe (famiglie A/B dell'Ishāq-Thābit) che, spesso, omettendo o riordinando certe frasi, eliminano l'impressione di CM. In Heiberg la sequenza può dare — se letta superficialmente — l'impressione che da «A measures C» si deduca «A does not measure C» nella stessa prova; ma l'analisi filologica e la tradizione araba suggeriscono che l'interpretazione originaria era differente (la dimostrazione, secondo Acerbi, è in realtà un direct proof in certe redazioni, o una reductio ben strutturata in altre). fileciteturn6file4fileciteturn6file18

B. Formalizzazione ND (due scenari: versione corrotta vs versione emendata / araba)
Scenario 1 — versione corrotta / lettura superficiale (per cui alcuni hanno visto CM)
Γ. (ipotesi: A,B,C,… continui proportional ecc).
Supponi p := «A misura C». (apriamo sottoprova)
Per la costruzione (= prendere Z,H,F ecc.) si deduce: Z non è una unità; Z e F sono primi tra loro; da proporzioni segue che A non misura C. (cioè ricaviamo ¬p).
Quindi Γ, p ⊢ ¬p (cioè p → ¬p è dimostrato nella sottoprova).
Se si compone e si fa un corto-taglio formale si può arrivare alla forma ((¬p → p) → p) applicata in vario modo — ma questo è un falso amico logico: la sequenza qui è p → ¬p (non ¬p→p) e la conversione alla forma CM è un'interpretazione anacronistica o un editing di Clavius (come nota Acerbi).
Nota importante: il pattern p→¬p (dalla supp. p) non è CM; è un contradictio che dà ¬p dalla supposizione p — cioè una reductio canonica (p→⊥). CM riguarda invece il caso ¬p→p (la supposizione della negazione porta alla formula), quindi i due casi non sono lo stesso. Acerbi evidenzia che la lettura che porta a CM qui è frutto di varianti e di fotomontaggi editoriali (p.es. Clavius).
Scenario 2 — versione araba / emendata (lettura emendata di Acerbi)
Γ. (dati)
Non c'è una sottoprova che dia direttamente p → ¬p come nella versione corrotta; invece la prova è organizzata come una serie di riduzioni/argomenti macro che servono a stabilire l'affermazione negativa direttamente per conversione o per riduzione su altri assunti. In molte copie arabe l'intervallo di testo che in Heiberg sembra dare p→¬p è abbreviato o mancato del tutto — la catena riscritta mostra che la «contraddizione» non nasce da p diretto ma da altri collegamenti testuali; dunque l'apparenza di CM cade.

C. Proof-theory e valutazione semantica

Se la versione è $p \rightarrow \neg p$: questo è una reductio classica su p: suppongo p, ottengo ¬p, quindi chiudo e concludo ¬p. Questo è normalissimo e non è CM. Convertire $p \rightarrow \neg p$ in CM sarebbe un errore; CM ha la forma $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$. Acerbi mostra che Clavius talvolta riformula passi così da farli apparire CM; questo è manipolazione editoriale, non lettura autentica.

Se la versione è una direct proof: allora non si ha alcuna reductio; l'apparenza testuale che fa sembrare la prova un'istanza di CM è dovuta a una successione di formulazioni (p, poi affermazioni che sembrano contraddirla), ma filologicamente questo è un artefatto di redattori posteriori. Acerbi evidenzia che le famiglie arabe spesso presentano direttamente la corretta o più economica struttura.

Conclusione su VIII.6: questo è il caso più forte a favore dell'opinione di Acerbi: le varianti testuali e la coesistenza di versioni arabe che non manifestano l'apparenza CM rendono altamente probabile che la lettura «CM nell'originale» sia errata.

In definitiva, ho mostrato che - formalmente - per IX.36 (come per IX.12) esistono sottoprove D1 e D2 componendo le quali si rende possibile una lettura CM se si adotta la logica classica; tuttavia Acerbi ha ragione sul piano filologico: il testo greco spesso struttura la reductio su una proposizione intermedia (e nel farlo fornisce indicatori come hupokeitai), e la tradizione araba in molti casi riorganizza/smussa le clausole in modo che l'apparenza CM scompare. VIII.6 appare il caso più solido dove CM è un artefatto di trasmissione.

Proof-theory e metalogica

Le due proposizioni, IX.36 e VIII.6, mostrano che il problema non è puramente testuale ma anche metalogico:

Se lavoriamo in logica classica (implicazione materiale), la compressione D1+D2 → CM è sempre possibile, e quindi la CM è «presente» nel senso proof-theoretic.

Se lavoriamo in logica intuizionista, la formula $((\neg p \rightarrow p) \rightarrow p)$ non è un teorema: dunque la CM non è disponibile, e le prove greche non mostrano CM.

Se lavoriamo in logiche di rilevanza, la derivazione $\neg p \rightarrow p$ è inammissibile se p non è rilevante per ¬p: questo esclude CM.

La scelta della logica ricostruttiva determina il verdetto. Acerbi implicitamente adotta una cornice non-classica (o almeno, non identifica l'implicazione greca con quella materiale classica), e da lì conclude l'inesistenza di CM. Ma la controargomentazione è che, se si adotta la logica classica come linguaggio di ricostruzione, la CM è pienamente visibile e

coerente.
Proof-theory e metalogica
Le due proposizioni, IX.36 e VIII.6, mostrano che il problema non è puramente testuale ma anche metalogico:
Se lavoriamo in logica classica (implicazione materiale), la compressione D1+D2 → CM è sempre possibile, e quindi la CM è «presente» nel senso proof-theoretic.
Se lavoriamo in logica intuizionista, la formula ((¬p → p) → p) non è un teorema: dunque la CM non è disponibile, e le prove greche non mostrano CM.
Se lavoriamo in logiche di rilevanza, la derivazione ¬p → p è inammissibile se p non è rilevante per ¬p: questo esclude CM.
La scelta della logica ricostruttiva determina il verdetto. Acerbi implicitamente adotta una cornice non-classica (o almeno, non identifica l'implicazione greca con quella materiale classica), e da lì conclude l'inesistenza di CM. Ma la controargomentazione è che, se si adotta la logica classica come linguaggio di ricostruzione, la CM è pienamente visibile e coerente.

Appendice 1

Micro-atomizzazione delle Proof-Trees
I. Notazione comune
Per chiarezza introduco atomi proposizionali e annotazioni che userò ripetutamente.
Contesto fisso: Γ = tutte le premesse costruttive ed esplicite dell'enunciato (costruzione dei multipli, proprietà iniziali di E, D ecc.).
Per IX.36:
S0: "O misura ZH" (clausola (1) come nel testo)
S1: "O non è lo stesso con nessuno di {A,...,M}" (clausola (2) — la supposizione problematica)
M_P: "multiplicità corrispondenza: quante volte O misura ZH, così tante unità in P" (passo costruttivo intermedio)
R1: "O non misura D" (la proposizione intermedia che Acerbi indica)
C: contraddizione (⊥) / proposizione che genera la reductio
Lemmi euclidei (usati come regole ND atomiche):
(L19) = applicazione del lemma VII.19: transizioni sui primi e divisori
(L20) = applicazione del lemma VII.20: passaggi per dedurre coprimalità
(L21) = applicazione del lemma VII.21: trasferimento di condizioni lungo proporzioni

(L21) = applicazione del lemma VII.21: trasferimento di condizioni lungo proporzioni
(IX13) = applicazione di IX.13 (usato esplicitamente in IX.36)
(CONST) = passaggi costruttivi
(ARITH) = fatto aritmetico elementare

II. El. IX.36 — Proof-tree micro-atomica
Sottoprova D1: da S1 ricavare R1
1. Γ. (Premesse costruttive: definizioni, dati di enunciato IX.36)
2. Assunzione: S1. ("O non è lo stesso con nessuno di A..M") — apertura sottoprova
3. (CONST-1) Introduco la costruzione dei multipli e definisco P s.t. "quante volte O misura ZH, così tante unità in P"
4. (L21-a) Applico (L21) per la proporzione "come E è a P, così O è a D" (trasferimento proporzionale)
5. (ARITH-1) Dalla costruzione (3) e (4) deduco l'identificazione del numero di multipli
6. (L19-a) Applicazione di (L19): dalla primalità su E e dalla non coincidenza S1 ricavo non-divisibilità su termine intermedio Z
7. (ARITH-2) Dalla non-divisibilità (6) deduco che Z non è unità (Z ≠ 1)
8. (L20-a) Applicazione di (L20): da Z non-unità e proporzioni, ottengo che Z è coprimo con F (Z ∥ F)
9. (L21-b) Applicazione iterata di (L21): trasferisco la coprimalità fino a R1: "O non misura D"
Conclusione D1: Γ, S1 ⊢ R1

Sottoprova D2: da R1 condurre alla contraddizione
10. Γ. (premesse)
11. Assunzione: R1. (supponiamo "O non misura D") — apertura sottoprova
12. (CONST-2) Richiamo la costruzione completa di ZH, P, E, FK, L, M
13. (L21-c) Applico (L21) per legare il rapporto fra P e altri termini con la posizione di O e D
14.(IX13-a) Uso IX.13 per connettere che "D is not measured by any other number except A,B,C" con le deduzioni precedenti
15. (CONTRAD) Da 11-14 ottengo la contraddizione C
Conclusione D2: Γ, R1 ⊢ ⊥ ⇒ Γ ⊢ ¬R1

Composizione proof-theoretic
16. D1 fornisce Γ, S1 ⊢ R1. D2 fornisce Γ, R1 ⊢ ⊥. Applico il cut su R1:

ottengo Γ, S1 ⊢ ⊥
17. Concludo Γ ⊢ ¬S1 (chiusura della reductio sull'assunzione S1)
Nota critica: Questa micro-scomposizione mostra esattamente quali lemmi (L19/L20/L21/IX13) vengono invocati in ciascun passo. La transizione da qui a una forma "CM-like" (Γ ⊢ (¬p→p) o la forma che porta a ((¬p→p)→p)) richiede ulteriori trasformazioni formali (raggruppare le sottoprove in modo che assumendo ¬p si ottenga p) — trasformazioni ammissibili in logica classica tramite →-I e uso di tautologie, ma non descritte esplicitamente nel flusso retorico greco: per questo Acerbi esita.

La forza della tesi di Acerbi è filologica: l'analisi dei manoscritti e delle tradizioni arabe mostra che molte letture CM sono illusioni. La sua debolezza è l'estensione indebita: dal piano testuale egli inferisce l'inesistenza proof-theoretic di CM. In realtà, se si adotta la logica classica come linguaggio di ricostruzione, IX.36 (come IX.12) contiene sottoprove che, composte, realizzano esattamente la struttura di CM.
La posizione equilibrata è dunque: la CM non è un principio esplicitamente tematizzato da Euclide, ma in più casi (IX.12, IX.36) la struttura delle dimostrazioni, formalizzata in logica classica, equivale a una CM. In altri casi (VIII.6) la CM è un artefatto. La generalizzazione «non c'è CM» è quindi eccessiva.

Appendice 2

Fase C: micro-atomizzazione ultra-dettagliata dei passi aritmetici e delle inferenze di El. IX.36 e VIII.6
Per ciascuna proposizione do:
un elenco di atomi proposizionali/terminologia (per chiarezza);
la proof-tree in stile Deduzione Naturale con passi atomici in cui ogni applicazione di un lemma VII.xx / IX.yy è trattata come una regola ND distinta (marcata come (L19), (L20), (L21), ecc.);
accanto ad ogni passo indico la giustificazione euclidea (nome del lemma/operazione) e la corrispondenza testuale / la parafrasi di Acerbi che motiva quel passo.
NB. Ho mantenuto la massima granularità utile storicamente: non traduco ogni lemma in regole logiche primitive (es.: cut → modus ponens) fino all'ultimo atomo logico minimale - questo sarebbe sterminato e poco leggibile.

I. Notazione comune (per entrambe le proof-trees)

Per chiarezza introduco atomi proposizionali e annotazioni che userò ripetutamente.
Contesto fisso: Γ = tutte le premesse costruttive ed esplicite dell'enunciato (costruzione dei multipli, proprietà iniziali di E, D ecc.).
Usiamo nomi brevi per affermazioni locali:
1) per IX.36:
S0: "O misura ZH" (clausola (1) come nel testo).
S1: "O non è lo stesso con nessuno di {A,...,M}" (clausola (2) - la supposizione problematica).
M_P: "multiplicità corrispondenza: quante volte O misura ZH, così tante unità in P" (passo costruttivo intermedio).
R1: "O non misura D" (la proposizione intermedia che Acerbi indica).
C: contraddizione (⊥) / proposizione che genera la reductio.
2) per VIII.6:
T0: enunciato iniziale (es.: "A misura C" nella redazione corrotta).
T1: proprietà intermedie ricavate dalla costruzione (Z non unità; Z primo con F, ecc.).
Q: proposizione finale ricavata che contraddice T0 (p → ¬p scenario).
Lemmi euclidei (usati come regole ND atomiche - ogni lemma = un passo ND):
(L19) = applicazione del lemma VII.19: transizioni sui primi e divisori (descrizione storica: regola che da "E è primo e divide certe molteplicità" ricava non-divisibilità / relazioni di fattorizzazione su termini intermedi).
(L20) = applicazione del lemma VII.20: passaggi che permettono di dedurre coprimalità (primalità fra due termini) a partire da non-unità + proporzioni.
(L21) = applicazione del lemma VII.21: trasferimento di condizioni di coprimalità / molteplicità lungo proporzioni (spostamento di coprimalità lungo paralleli proporzionali).
(IX13) = applicazione di IX.13 o altro lemma IX necessario (usato esplicitamente in IX.36 come indicato da Acerbi).
(CONST) = passaggi costruttivi (definizione dei multipli / costruzione di sequenze T1,T2,...).
(ARITH) = fatto aritmetico elementare (se non divide allora non è unità, ecc.).
Ogni passo sarà numerato e motivato. Dove possibile cito Acerbi sul passaggio.

II. El. IX.36 — micro-atomizzazione DN
A. Obiettivo
Esplicitare DN con ogni lemma come passo atomico per mostrare la catena: Γ, S1 ⊢ R1 (D1) e Γ, R1 ⊢ ⊥ o Γ,R1 ⊢ conseguenze che chiudono la reductio

(D2). Poi discutiamo la composizione (cut).
B. Proof-tree micro-atomica (IX.36)
(Per facilità, presento la proof-tree in forma sequenziale con numerazione dei sotto-passi; ogni passo chiude una sottoprova quando indicato.)
Contesto: Γ (dato)
Sottoprova D1: da S1 ricavare R1
1. Γ. (Premesse costruttive: definizioni, dati di enunciato IX.36).
2. Assunzione: S1. ("O non è lo stesso con nessuno di A..M") - apertura sottoprova.
3. (CONST-1) Introduco esplicitamente la costruzione dei multipli e definisco la variabile P s.t. "quante volte O misura ZH, così tante unità in P". (passo costruttivo esplicitato). — giustificazione: frase di Acerbi sulla corrispondenza multiplicity.
4. L21-a) Applico (L21) in prima istanza per mettere in relazione la proporzione "come E è a P, così O è a D". (trasferimento proporzionale immediato). - giustificazione: frase «as E is to P, so O is to D».
5. (ARITH-1) Dalla costruzione (3) e (4) deduco l'identificazione del numero di multipli: concretizzo che la molteplicità di O su ZH corrisponde alla molteplicità rilevante su D. — giustificazione aritmetica implicita.
6. (L19-a) Applicazione di (L19): dalla primalità/condizione su E (parte di Γ) e dalla non coincidenza S1 ricavo che il termine intermedio Z non è misurato da certe quantità (passo di non-divisibilità). — giustificazione: passaggio in cui 7. VII.19 è invocato per stabilire non-divisibilità rilevante.
7. (ARITH-2) Dalla non-divisibilità (6) deduco che il termine Z non è unità ($Z \neq 1$). — giustificazione: argomento aritmetico semplice.
8. (L20-a) Applicazione di (L20): da Z non-unità e dalle proporzioni, ottengo che Z è coprimo con un certo F ($Z \parallel F$). — giustificazione: passaggio nel testo che conduce a "Z and F are prime to one another".
9. (L21-b) Applicazione iterata di (L21): trasferisco la relazione di coprimalità indietro lungo la catena fino a giungere a R1: "O non misura D" (o più precisamente la clausola che nei manoscritti appare come (5)). - giustificazione: passaggio testuale dove VII.21 è invocato per riportare la coprimalità su E e A (o su O e D).
Conclusione D1: da 2–9 ottengo $\Gamma, S1 \vdash R1$. (chiudo sottoprova D1).

Sottoprova D2: da R1 condurre alla contraddizione (o alla proposizione finale che contraddice S1 o un'altra premessa)

1. Γ (premesse)

2. Assunzione: R1. (supponiamo “O non misura D”) - apertura sottoprova.
3. (CONST-2) Richiamo la costruzione completa di ZH, P, E, FK, L, M come definita: questa fornisce i coefficienti di molteplicità usati nella catena. - giustificazione: setting-out testuale.
4. (L21-c) Applico (L21) per legare il rapporto fra P e B (o altri termini intermedi) con la posizione attuale di O e D, estraendo l’ordine dei multipli. - giustificazione testuale (passaggi di trasferimento
5. (IX13-a) Uso IX.13 (come ricorda Acerbi) per connettere il fatto che “D is not measured by any other number except A, B, C” con le deduzioni precedenti; con questa connessione, il fatto R1 si trova in conflitto con l’ipotesi (1) o con il contesto di esclusività. — giustificazione: frase di Acerbi che usa IX.13 nella
6. (CONTRAD) Da 11–14 ottengo la contraddizione C (ad es. S0 insieme a R1 produce incompatibilità con Γ). - giustificazione: la sequenza è la chiusa reductio che Acerbi annota.
Conclusione D2: da 11–15 ottengo Γ, R1 ⊢ ⊥ (chiudo D2) ⇒ Γ ⊢ ¬R1

Composizione e osservazioni proof-theory
D1 forniva Γ, S1 ⊢ R1. D2 fornisce Γ, R1 ⊢ ⊥. Applico il cut su R1: da 16 ottengo Γ, S1 ⊢ ⊥. — giustificazione: composizione standard (cut). (mostrato esplicitamente come passaggio di LK)
Concludo Γ ⊢ ¬S1. (chiusura della reductio sull’assunzione S1)

Nota chiave: questa micro-scomposizione mostra esattamente quali lemmi (L19/L20/L21/IX13) vengono invocati in ciascun piccolo passo. La transizione da qui a una forma “CM-like” (Γ ⊢ (¬p → p)) o la forma che porta a ((¬p → p) → p) richiede ulteriori trasformazioni formali (raggruppare le sottoprove in modo che assumendo ¬p si ottenga p) — trasformazioni che sono ammissibili in logica classica tramite →-I e uso di tautologie, ma non sono descritte esplicitamente nel flusso retorico greco: per questo Acerbi esita.

C. Mapping frase-per-frase (IX.36) — riferimenti ad Acerbi
Accoppio ora i passi DN micro-atomici ai passaggi/parafrasi di Acerbi:
Passo 2 (S1 assunzione): vedi la sua parafrasi iniziale di IX.36 dove stabilisce la supposizione (2).
Passo 3 (CONST-1): parafrasi di Acerbi sulla costruzione dei multipli e sull’introduzione di P.

Passi 4–5 (L21-a ; ARITH-1): «as E is to P, so O is to D» — testo di Acerbi che motiva il trasferimento proporzionale.
Passi 6–9 (L19/L20/L21): corrispondono alle sezioni in cui Acerbi elenca le applicazioni (VII.19, VII.20, VII.21) nella catena che riduce (2) a (3).
Passi 11–15 (D2): corrispondono alla parte in cui Acerbi mostra la chiusura della reductio e l'uso di IX.13.

III. El. VIII.6 — micro-atomizzazione DN
Per VIII.6 procedo analogamente: scomponendo ogni lemma usato in passi atomici. Ricordo: VIII.6 è il caso più chiaro dove la tradizione greca (ed. Heiberg o manoscritti corruttivi) può suggerire $p \rightarrow \neg p$ o un ordine che induce letture spurie; la versione araba spesso risolve l'ambiguità.
A. Obiettivo
Mostrare la micro-scomposizione che porta - nella redazione corrotta - da T0 (assunzione) a Q (proposizione contraddittoria), e illustrare i passi dove la versione araba interviene eliminando l'ellissi.

B. Proof-tree micro-atomica (VIII.6) - scenario versione corrotta
Contesto: Γ (ipotesi costruttive, lemmi VII applicati)
1. Γ. (premesse: definizioni, setup di VIII.6)
2. Assunzione: T0 («A misura C») - apertura sottoprova. (questa è la supposizione che la versione corrotta sembra prendere come punto di partenza)
3. (CONST-A1) Introduzione della costruzione dei multipli (Z, H, F, ecc.) utilizzata da Euclide nella proposizione. - giustificazione: testo (Heiberg) che mostra la costruzione sequenziale.
4. (L19-A1) Applicazione di (L19) su certe coppie: dalla primalità di alcuni elementi e dall'ipotesi T0 traggo non-divisibilità su un termine intermedio Z. - giustificazione: passaggio che appare nella tradizione Heiberg.
5. (ARITH-A1) Dalla non-divisibilità deduco che Z non è unità. -
giustificazione aritmetica.
(L20-A1) Applico (L20) per ottenere la coprimalità $Z \parallel F$. - giustificazione: passo testuale che connette Z e F.
(L21-A1) Trasferisco la coprimalità lungo la proporzione per giungere alla proposizione Q («A non misura C») - giustificazione: la catena proporzionale in VIII.6 che conduce al risultato.
Conclusione (versione corrotta): da 2–7 ho $\Gamma, T0 \vdash Q$. Questo è $p \rightarrow \neg p$ (sottoprova che assume p e ricava ¬p) - reductio canonica su p.
Importante: $p \rightarrow \neg p$ NON = CM. CM ha la forma $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$; qui la

sottoprova produce p → ¬p. Alcuni editori storici (Clavius etc.) hanno modificato o riformulato passi di questo genere in modo tale che la sequenza sembri compatibile con CM: Acerbi mostra che questo è un errore editoriale/di tradizione.

C. Versione araba / emendata - dove cade l'apparenza della CM
Nelle famiglie arabe si eliminano o riorganizzano frasi intermedie (passi come 3-6 possono essere condensati o spostati), così che non esiste la sequenza testuale che mostri esplicitamente la sottoprova T0 ⊢ Q; invece la prova appare come una reductio su altra supposizione r' o come una direct proof. Pertanto la versione araba rimuove la base per leggere p → ¬p → (short-cut) CM. Acerbi documenta questi confronti e mostra che VIII.6 è plausibilmente un caso di corruzione nella tradizione greca.

Appendice 3

Decomposizione formale dei lemmi VII.19, VII.20, VII.21 e IX.13 in regole logiche primitive, così da ridurre la micro-atomizzazione di IX.36 e VIII.6 fino al livello proposizionale (connettivi e quantificatori).

Le proposizioni di Euclide in VII–IX non sono formulate in linguaggio simbolico, ma parlano di divisibilità, primalità, coprimalità e proporzioni. Possiamo però formalizzarle in logica del primo ordine (FOL) con predicati aritmetici standard:
- Div(x,y): "x divide y"
- Prime(x): "x è primo"
- Unit(x): "x è unità (cioè =1)"
- Coprime(x,y): "x e y sono primi fra loro"
- Mult(x,y,n): "x è multiplo di y con molteplicità n"
- Prop(a,b,c,d): "a:b = c:d" (proporzione in senso euclideo)

Regole logiche primitive disponibili: ∧, ∨, ¬, →, ∀, ∃.
Lo scopo: mostrare come ciascun lemma si riduca a una formula FOL che può essere usata come assioma/regola ND.
Formalizzazioni dei lemmi
1. Lemma VII.19
Testo (Acerbi/Heiberg): "Ogni numero primo non misura ciò che non è composto con esso".
Formalizzazione:
∀p∀n (Prime(p) ∧ ¬Div(p,n) → Coprime(p,n)

In DN:
- Premessa: Prime(p)
- Premessa: ¬Div(p,n)
- Conclusione: Coprime(p,n)

2. Lemma VII.20
Testo: “Se un numero non è unità ed è primo con un altro, allora il secondo non divide il primo” (parafrasi).
Formalizzazione:
∀a∀b (¬Unit(a) ∧ Coprime(a,b) → ¬Div(b,a)
In DN:
- Premesse: ¬Unit(a), Coprime(a,b)
- Conclusione: ¬Div(b,a)

3. Lemma VII.21
Testo: “Se come A è a B, così C è a D, e A e B sono primi fra loro, allora anche C e D sono primi fra loro”.
Formalizzazione:
∀a∀b∀c∀d (Prop(a,b,c,d) ∧ Coprime(a,b) → Coprime(c,d)
In DN:
- Premesse: Prop(a,b,c,d), Coprime(a,b)
- Conclusione: Coprime(c,d)

4. Lemma IX.13
Testo: usato in IX.36 per chiudere la reductio; stabilisce che se un numero non è divisibile da un certo insieme, allora deve coincidere con un termine fissato.
Formalizzazione (schematica, dato che il testo è lungo):
∀n∀S ; ((∀m∈S \; ¬Div(m,n)) → (∃k \; (n = k)))
In DN:
- Premessa: ∀m∈S (¬Div(m,n))
- Conclusione: ∃k (n=k) (identificazione univoca con uno degli A..M)

III. Applicazione a IX.36 (decomposizione atomica)
Ora, ogni passo della micro-atomizzazione può essere visto come un’applicazione diretta di una di queste regole FOL.
Esempio:
- Passo 6 (DN micro): applicazione di L19 → Prime(E), ¬Div(E,A) ⊢ Coprime(E,A).

- Passo 8 (DN micro): applicazione di L20 → ¬Unit(Z), Coprime(Z,F) ⊢ ¬Div(F,Z).
- Passo 9 (ND micro): applicazione di L21 → Prop(E,P,O,D), Coprime(E,P) ⊢ Coprime(O,D).

Così tutta la sottoprova D1/D2 di IX.36 diventa una sequenza ND puramente proposizionale.

IV. Applicazione a VIII.6 (decomposizione atomica)

Stesso principio:

- Passo 4 (DN micro): applicazione L19 → Prime(A), ¬Div(A,Z) ⊢ Coprime(A,Z).
- Passo 6 (DN micro): applicazione L20 → ¬Unit(Z), Coprime(Z,F) ⊢ ¬Div(F,Z).
- Passo 7 (DN micro): applicazione L21 → Prop(Z,F,A,C), Coprime(Z,F) ⊢ Coprime(A,C).

La contraddizione finale deriva da T0 (A divide C) con ¬Div(A,C).

La micro-atomizzazione di IX.36 e VIII.6 rende visibile che la “compressione” in forma CM $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$ è una derivazione standard, non un’invenzione esterna, se si accetta la logica classica.

Il saggio di Acerbi ha il grande merito di riportare la discussione sulla consequentia mirabilis (CM) alla sua base filologica. La sua tesi forte è inequivocabile: non esiste la CM nella matematica greca, né come principio esplicito, né come pratica inferenziale riconosciuta.

Le ragioni addotte sono due:

- molte delle presunte occorrenze derivano da testi corrotti (VIII.6) o da interpretazioni editoriali (Heiberg, Clavio);
- i matematici greci non disponevano di un concetto formalizzato di inferenza analogo a quello moderno, quindi è fuorviante attribuire loro la CM come regola implicita.

Questa tesi, rigorosa sul piano filologico, è però problematica se intesa in senso proof-theoretic e meta-logico.

Un primo passo critico è distinguere tre livelli analitici:

1. Livello filologico: ciò che i manoscritti e le tradizioni (greca, araba, latina) effettivamente riportano. Qui Acerbi ha ragione: mai troviamo un enunciato esplicito di CM.
2. Livello proof-theoretic: ciò che possiamo formalizzare a partire dai passi testuali. Alcune prove contengono concatenazioni di sottoprove equivalenti a $\neg p \vdash p$.
3. Livello meta-logico: la logica adottata come linguaggio di ricostruzione. In logica classica $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$ è teorema; in intuizionismo no; in logiche di rilevanza è addirittura vietato.

Acerbi tende a confondere il livello (1) con il livello (2): dall'assenza testuale inferisce l'inesistenza inferenziale. Ma è solo tenendo separati i tre livelli che possiamo fare un bilancio corretto.
Gli esempi discussi nei suoi articoli mostrano una tipologia tripartita:
- Casi spuri (VIII.6): la CM è solo un artefatto della tradizione corrotta. Qui Acerbi ha ragione: non c'è CM né testuale né inferenziale.
- Casi ambigui (IX.36): il testo suggerisce una reductio mirata su una clausola, ma la concatenazione delle sottoprove genera, se formalizzata, un pattern CM. Qui filologia e logica divergono.
- Casi robusti (IX.12): la struttura inferenziale è tale che la lettura CM è quasi inevitabile in logica classica, pur senza apparire in superficie.
La distinzione è cruciale: confondere spuri e ambigui porta a cancellare la complessità del problema.
La CM è una tautologia in logica classica:
\[
((¬p → p) → p)
\]
ma non lo è in intuizionismo o in logiche di rilevanza. Questo significa che la scelta della logica di ricostruzione è determinante.
- Se assumiamo la logica classica, allora le sottoprove ¬p⊢p (ricostruite da IX.12 e IX.36) equivalgono a CM.
- Se assumiamo una logica intuizionista, queste stesse strutture diventano reductio standard.
- Se assumiamo una logica di rilevanza, diventano addirittura illecite.
La conclusione di Acerbi, quindi, non è un fatto storico assoluto ma una presa di posizione implicita: egli adotta un paradigma logico più restrittivo, e da lì conclude che CM "non c'è". Ma se cambiamo cornice logica, il giudizio cambia.
Retro-proiezione e ricostruzione: un discrimine necessario
È giusto evitare la retro-proiezione: non possiamo dire che Euclide "sapeva" di CM come regola autonoma. Ma altra cosa è la ricostruzione formale: tradurre la prassi inferenziale euclidea in un linguaggio logico moderno, esplicitando strutture implicite.
- Retro-proiezione indebita: attribuire a Euclide la coscienza di $((\neg p \rightarrow p) \rightarrow p)$ come teorema.
- Ricostruzione legittima: mostrare che alcune sue dimostrazioni, se tradotte in logica classica, equivalgono a $((\neg p \rightarrow p) \rightarrow p)$.
Negare la seconda possibilità in nome della prima significa rinunciare a un metodo fondamentale della storia della logica.

Dal punto di vista proof-theoretic, le dimostrazioni di IX.12 e IX.36 producono chiaramente una coppia di derivazioni:
- D1: $\Gamma, \neg p \vdash r$
- D2: $\Gamma, r \vdash p$

Combinandole con la regola di cut otteniamo $\Gamma, \neg p \vdash p$.
In logica classica, da qui segue $((\neg p \rightarrow p) \rightarrow p)$.
Questo non è un artificio moderno, ma una proprietà strutturale delle inferenze: se i due blocchi D1 e D2 sono realmente presenti nel testo (e lo sono, come Acerbi stesso descrive), allora la compressione proof-theoretic è una conseguenza legittima. La domanda diventa: quale logica scegliamo per leggere Euclide? Qui sta il vero problema.
La disputa sulla CM ha ricadute più ampie sulla storia della logica antica:
- ci obbliga a distinguere la pratica inferenziale (ciò che Euclide fa) da consapevolezza logica (ciò che Euclide sa di fare);
- mostra che la formalizzazione moderna non serve a sostituire la filologia, ma a integrare il quadro, rivelando proprietà latenti;
- insegna che non possiamo ridurre la logica greca a un repertorio chiuso: essa può generare, se letta in retrospettiva, strutture molto vicine a principi logici successivi.

Una posizione equilibrata deve dunque riconoscere entrambe le posizioni:
- Prudenza filologica (Acerbi): nessun testo greco enuncia CM, e in alcuni casi (VIII.6) la CM è illusoria.
- Legittimità proof-theoretic: in altri casi (IX.12, IX.36), la CM è ricostruibile come compressione standard in logica classica.

Il risultato è che la CM non è un concetto tematizzato dagli antichi, ma può emergere come struttura inferenziale se leggiamo le loro dimostrazioni con le nostre lenti logiche.
Il verdetto critico è quindi articolato:
1. Assenza testuale: la CM non compare mai enunciata.
2. Presenza inferenziale: alcune dimostrazioni, formalizzate in logica classica, producono strutture equivalenti a CM.
3. Casi spuri: altre dimostrazioni (VIII.6) mostrano CM solo per corruzioni testuali.
4. Scelta logica determinante: la validità della CM come schema inferenziale dipende dalla logica adottata per la ricostruzione.

Tirando le somme, possiamo affermare che la matematica greca non conosceva la consequentia mirabilis come principio, ma le sue dimostrazioni sono compatibili con essa in un quadro classico. Negare questa compatibilità significa confondere filologia e proof-theory. La posizione più solida è

riconoscere insieme il rigore di Acerbi e la possibilità di una lettura logica moderna, mantenendo distinta l'assenza testuale dall'inesistenza inferenziale. Il merito di Acerbi sta nell'avere corretto un'interpretazione troppo ingenua che vedeva CM "ovunque" nei testi antichi. Ma la sua conclusione assoluta - assenza totale della CM - è troppo rigida:

Filologicamente, è vero, non c'è evidenza che Euclide enunci o tematizzi CM come principio. A livello di Proof-theory, però, in alcune proposizioni (IX.12, IX.36) le strutture sono equivalenti a CM se lette in logica classica.

La valutazione finale si riassume dunque in questa frase: la consequentia mirabilis non è un concetto esplicitamente presente nella matematica greca antica; ciononostante, talune dimostrazioni di Euclide producono strutture che, ricostruite in logica classica, equivalgono a CM. L'assenza testuale non implica l'inesistenza inferenziale.